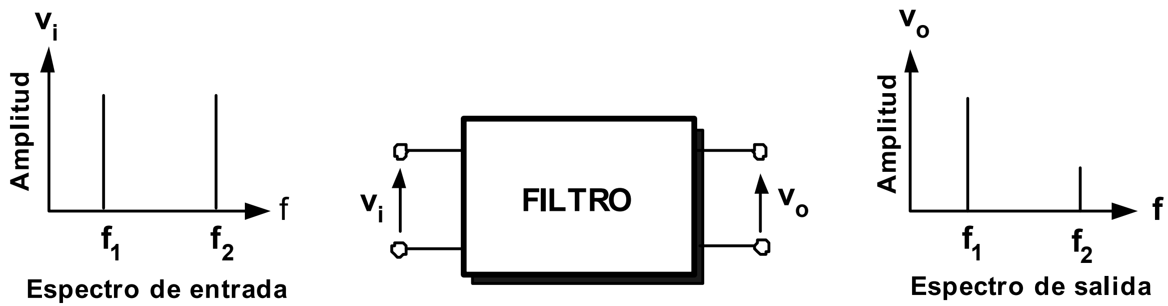
Filtros Analógicos

Introducción



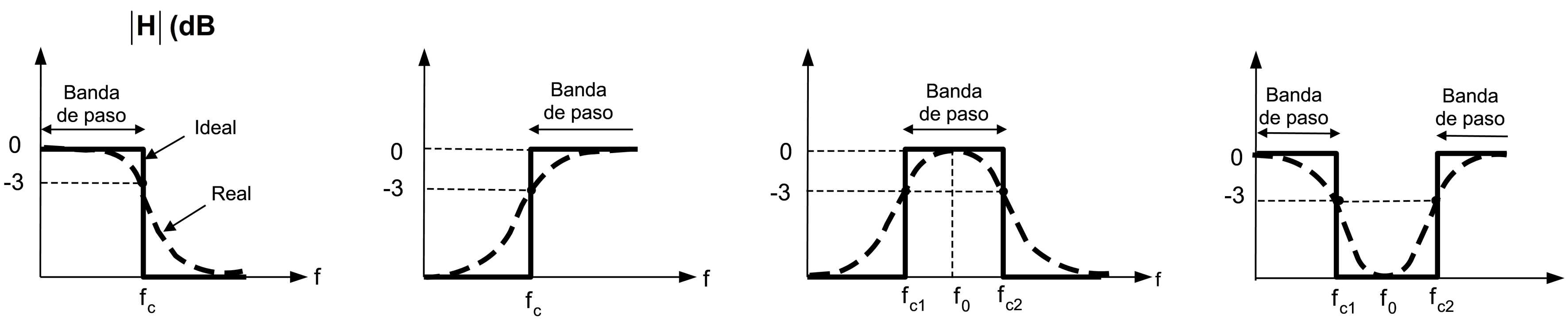
$$H(s) = \frac{v_o(s)}{v_i(s)} \quad \xrightarrow{s = j\omega} \quad H(j\omega) = |H(j\omega)| \angle \phi(\omega)$$

polos, raíces y orden

Clasificación tecnológica

- Pasivos
- Activos
- De capacidades conmutadas
- Digitales

Funciones de transferencia



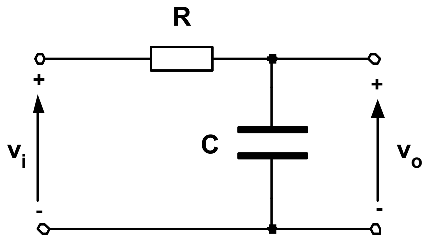
(a) Filtro paso bajo

(b) Filtro paso alto

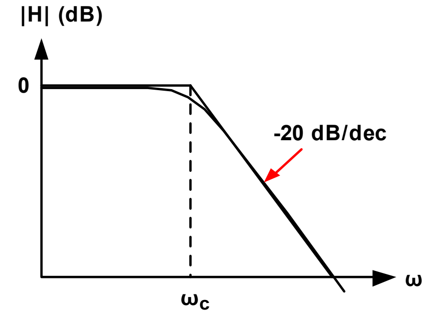
(c) Filtro paso banda

(d) Filtro rechazo de banda

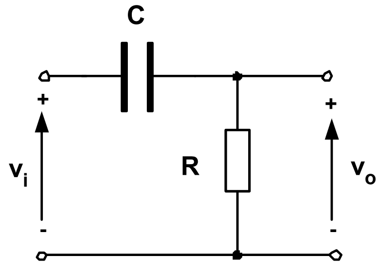
Filtros pasivos RC paso baja y paso alta (orden 1)



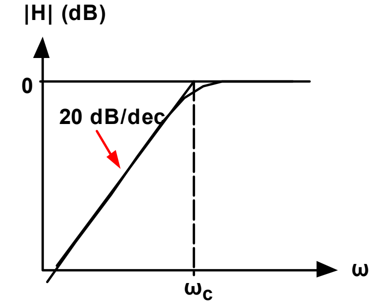
$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$



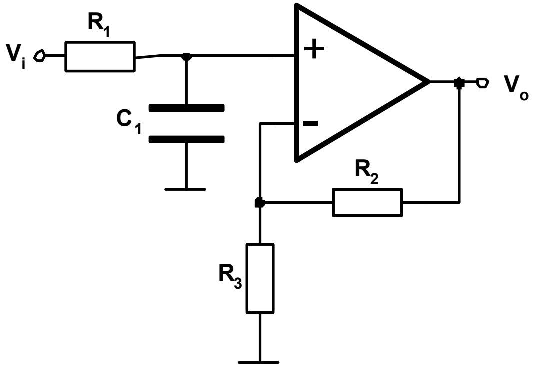
$$\omega_c = \frac{1}{RC}$$



$$H(j\omega) = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

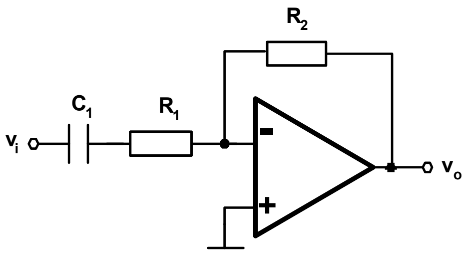


Filtros activos de orden 1



$$H(\omega)=\frac{1+\left(R_2/R_3\right)}{1+j\omega R_1 C_1}$$

paso de baja no inversor

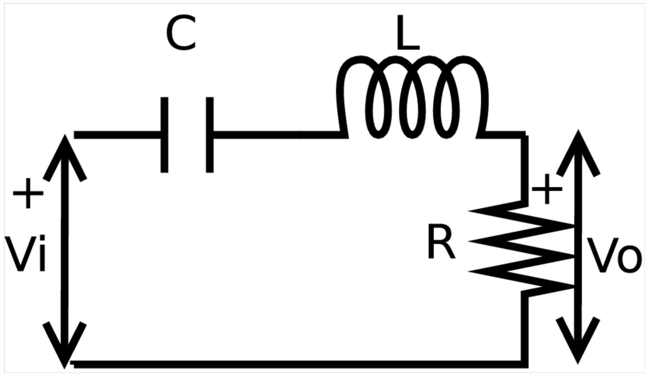


$$H(\omega)=\frac{-R_2/R_1}{1+\dfrac{1}{j\omega R_1 C_1}}$$

paso de alta inversor

Los filtros paso de alta se obtienen intercambiando C_1 y R_1.

Filtro pasivo RCL paso de banda (orden 2)



$$H(\omega)=\frac{R}{\frac{1}{j\omega C}+R+j\omega L}=\frac{j\omega RC}{1+j\omega RC-\omega^2 LC}$$

$$H(S)=\frac{R}{\frac{1}{SC}+R+SL}=\frac{(R/L)S}{1/(LC)+(R/L)S+S^2}$$

El denominador de los filtros de orden 2 suele escribirse en la forma

$S^2+\frac{\omega_0}{Q}S+\omega_0{}^2$ En este caso $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ $Q=\frac{1}{R}\sqrt{L/C}$

Ganancia máxima en $\omega=\omega_0$ (frecuencia natural/ de resonancia)

ω_0 es la media geométrica de las frecuencias de corte.

La diferencia entre las frecuencias de corte es B=R/L (ancho de banda).

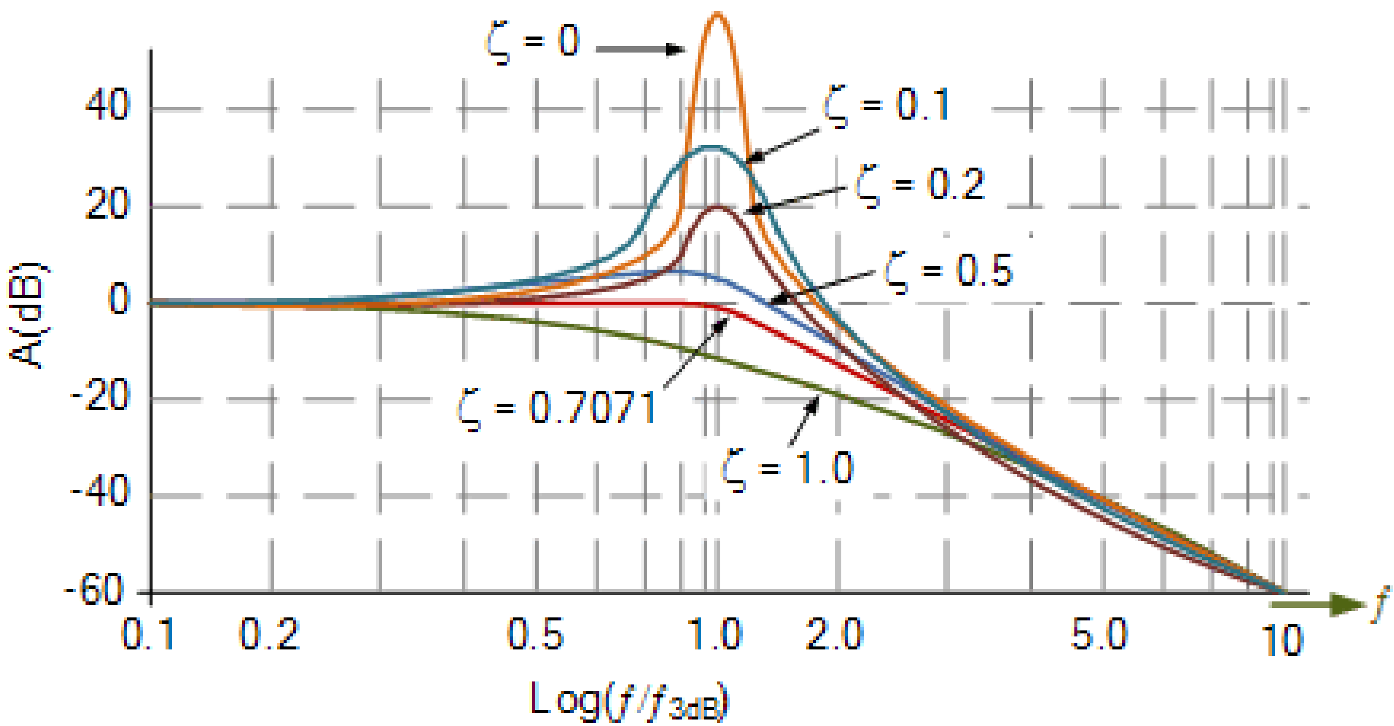
$Q=\omega_0/B$ (factor de calidad).

Se define $\zeta=1/(2Q)$ (relación de amortiguamiento).

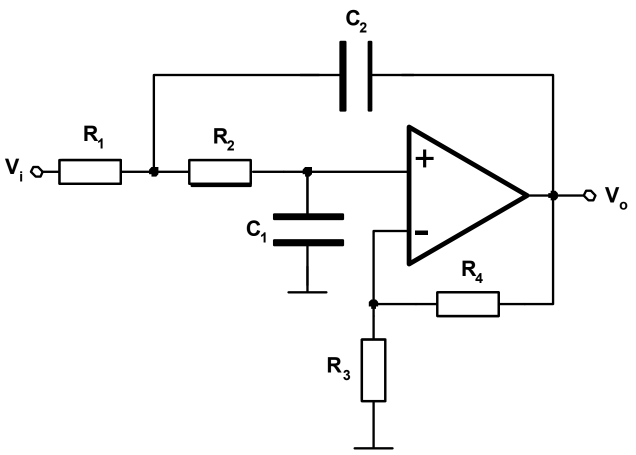
Relación de amortiguamiento

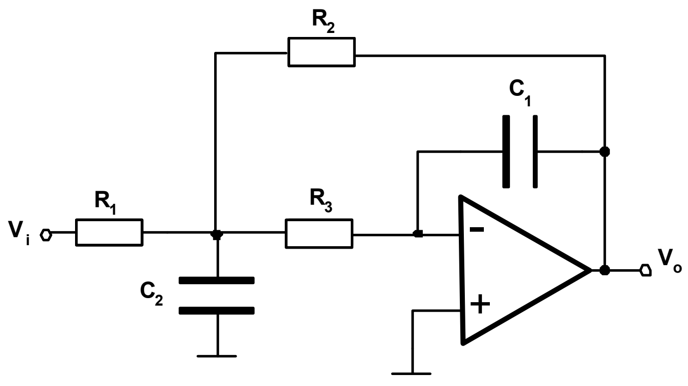
El módulo de $S^2+\frac{\omega_0}{Q}S+\omega_0{}^2=S^2+2\zeta\omega_0 S+\omega_0{}^2$

tiene un mínimo local en cierta frecuencia si $\zeta\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$
(su inversa tendrá un máximo local)



Filtros activos paso baja orden 2





Sallen-Key

Rauch/MFB

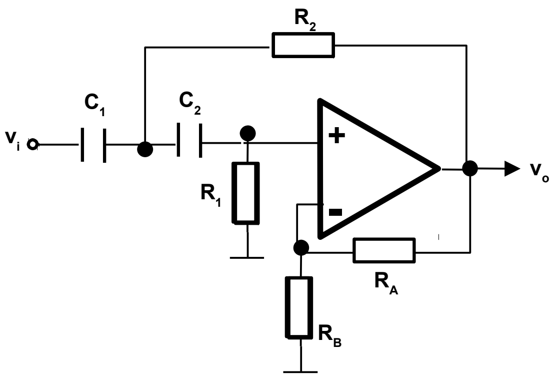
$$H(S)=\frac{K}{R_1 R_2 C_1 C_2 S^2+\left[C_1\left(R_1+R_2\right)+\left(1-K\right)R_1 C_2\right]S+1}$$

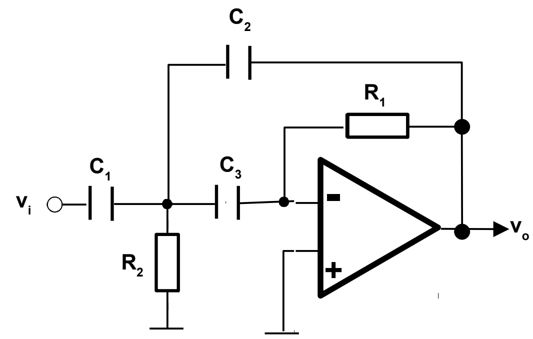
$$K=1+\frac{R_4}{R_3}$$

$$H(S)=\frac{K}{R_2 R_3 C_1 C_2 S^2+C_1\left(R_2+R_3+\frac{R_2 R_3}{R_1}\right)S+1}$$

$$K=-\frac{R_2}{R_1}$$

Filtros activos paso alta orden 2





Sallen-Key

$$H(S)=\frac{K}{1+\left[\frac{1}{R_1}\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)+(1-K)\frac{1}{C_1 C_2}\right]S^{-1}+\frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_2}S^{-2}}$$

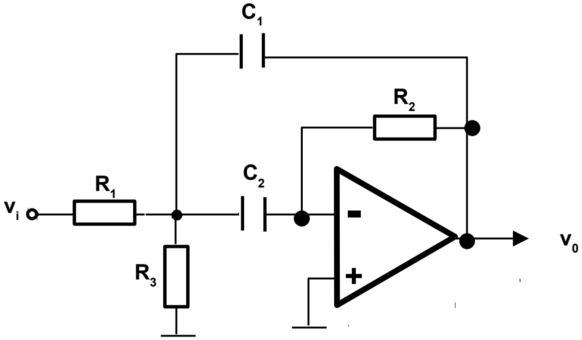
$$K=1+\frac{R_A}{R_B}$$

Rauch/MFB

$$H(S)=\frac{K}{1+\frac{1}{R_1}\left(\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}+\frac{C_1}{C_2 C_3}\right)S^{-1}+\frac{1}{R_1 R_2 C_2 C_3}S^{-2}}$$

$$K=-\frac{C_1}{C_2}$$

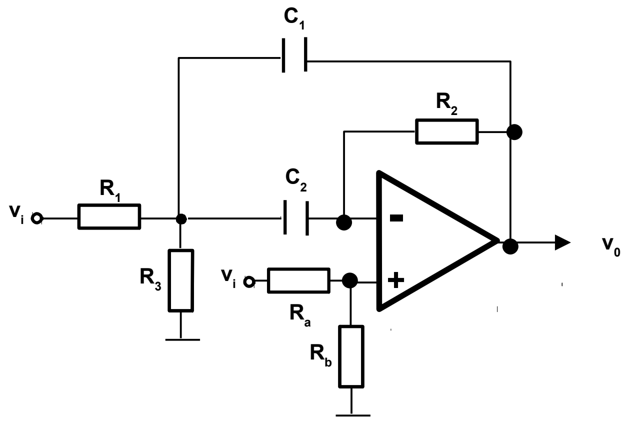
Filtros activos paso banda



$$H(S)=\frac{KS}{S^2+\frac{1}{R_2}\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)S+\frac{1}{C_1C_2R_2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}\right)}$$

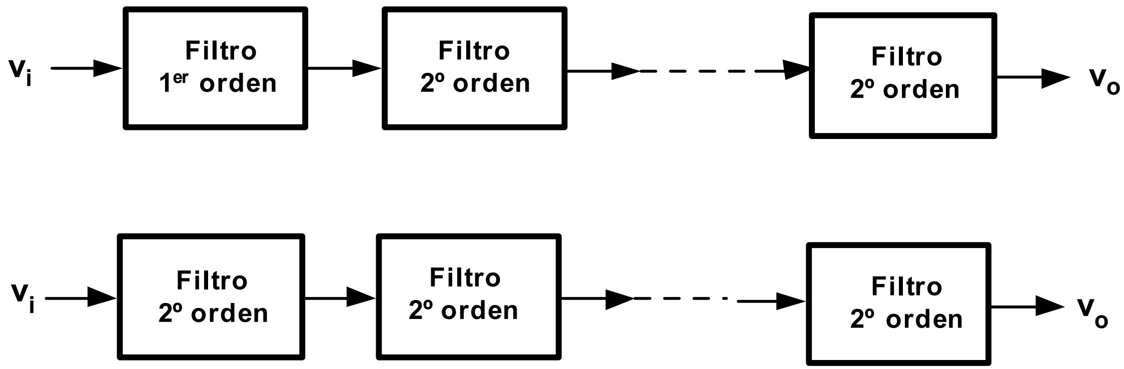
$$K=-\frac{R_2C_2}{R_1}$$

Filtros activos rechazo de banda



$$H(S)=\frac{R_b}{R_a+R_b}\frac{R_1R_2C_1C_2S^2+\left(R_1C_1+R_1C_2-R_2C_2R_a/R_b\right)S+1}{R_1R_2C_1C_2S^2+\left(R_1C_1+R_1C_2\right)S+1}$$

Filtros de orden superior



Elección de coeficientes en filtros paso baja y alta

- Supongamos se requiere un filtro paso de alta/baja de orden *n* de ganancia *K* y frecuencia de corte ω_c
- ¿Como se determinan las frecuencias naturales ω_0 y las relaciones de amortiguamiento ζ de los subfiltros?
  - Criterio de Butterworth: Se toman de forma que los polos tienen módulo unidad.
  - Criterio de Bessel: Se toman de forma que el denominador de la función de transferencia sea un polinomio de Bessel.
  - Otros criterios (Chebyshev, Legrende, Cauer, ..): Usan distintos polinomios para el denominador.
- Se usan tablas para determinar los coeficientes de acuerdo a estos criterios.

Tabla de denominadores de orden *n* entre 1 y 8 para el criterio de Butterworth

n	Polinomio normalizado
1	$X+1$
2	$X^2+1.4142X+1$
3	$(X+1)(X^2+X+1)$
4	$(X^2+0.7654X+1)(X^2+1.8478X+1)$
5	$(X+1)(X^2+0.6180X+1)(X^2+1.6180X+1)$
6	$(X^2+0.5176X+1)(X^2+1.4142X+1)(X^2+1.9319X+1)$
7	$(X+1)(X^2+0.4450X+1)(X^2+1.2470X+1)(X^2+1.8019X+1)$
8	$(X^2+0.3902X+1)(X^2+1.1111X+1)(X^2+1.6629X+1)(X^2+1.9616X+1)$

$X=S/\omega_c=j\omega/\omega_c$ en filtros paso de baja

$X=\omega_c/S=\omega_c/j\omega$ en filtros paso de alta

Elección de componentes pasivos en filtros de orden 2

- Supongamos se requiere un filtro paso de alta/baja de orden 2 de frecuencia natural ω_0 y relación de amortiguamiento ζ.
- ¿Como se establecen los valores de las impedancias de los elementos pasivos?
- Se introducen restricciones para reducir el espacio de diseño. Por ejemplo exigir que todas las resistencias/condenadores sean iguales, exigir ganancia máxima unitaria, etc.

Ejercicio

Diseñe un filtro paso de baja siguiendo la estructura Sallen-Key y el criterio de Butterworth con las siguientes características:

- T_{max} = 20 dB (ganancia máxima en la banda de paso)
- T_{min} = - 20 dB (ganancia máxima en la banda filtrada)
- ω_c = 250 rad/seg (frecuencia de corte)
- ω_{min} = 1500 rad/seg (inicio de la banda filtrada)

Nota: la función de transferencia en un filtro de Butterworth de orden *n* paso de baja cumple

$$|H(\omega)|^2 = \frac{T_{max}^2}{1 + (\omega/\omega_c)^{2n}}$$

Repita cambiando T_{max} = 0 dB manteniendo la atenuación en la banda filtrada (T_{min} = - 40 dB).