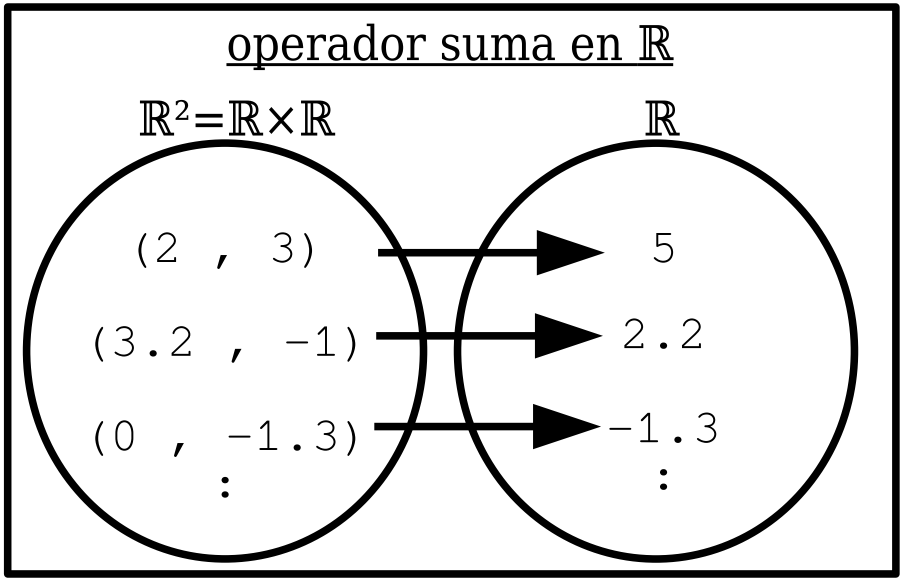
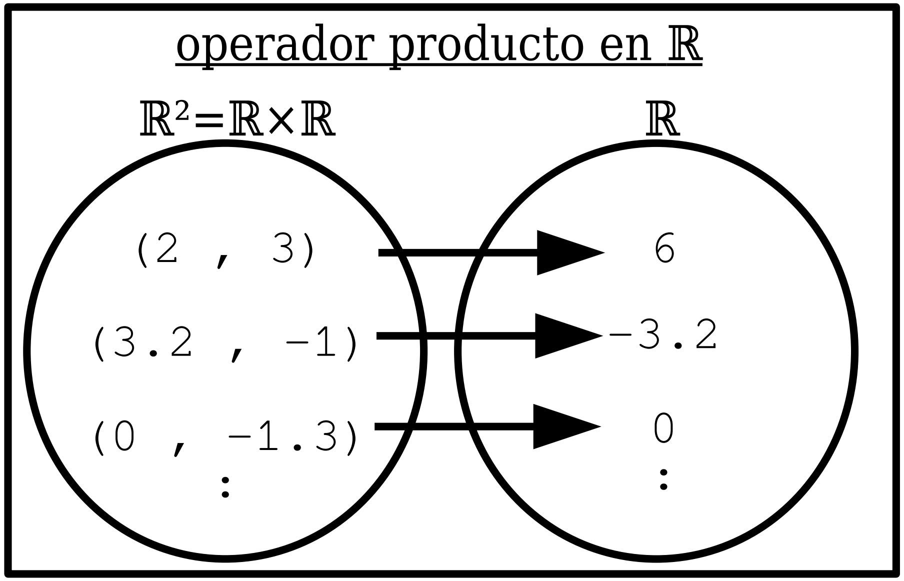
Tema 2
Realización electrónica del álgebra de conmutación

Álgebra de Boole

- Entender el funcionamiento de los circuitos digitales que usamos requiere conocer el concepto de álgebra de Boole.
- Recordatorio previo
  - Un operador binario interno en un conjunto C es una función de $C^2=C\times C$ en C.
  - Ejemplos:





Álgebra de Boole

- Por definición, un álgebra de Boole es una terna $<\mathbb{B},+,\bullet>$ en la que:
  - ➔ $\mathbb{B}$ es un conjunto no vacío. Sus elementos se denominan *valores Booleanos*.
  - ➔ $+$ (*or*) y $\bullet$ (*and*) son dos operadores binarios internos en $\mathbb{B}$.
  - ➔ $\mathbb{B}$ tiene un elemento denominado *nulo* (representado por 0) y otro denominado *identidad* (representado por 1) tales que se cumplen los siguientes postulados/axiomas:

1. Ley de identidad

$\forall\, x \in \mathbb{B}$: $x+0=x \quad \wedge \quad x\bullet 1=x$

2. Ley conmutativa

$\forall\, x,y \in \mathbb{B}$: $x+y=y+x \quad \wedge \quad x\bullet y=y\bullet x$

3. Ley distributiva

$\forall\, x,y,z \in \mathbb{B}$: $x\bullet(y+z)=(x\bullet y)+(x\bullet z) \quad \wedge \quad x+(y\bullet z)=(x+y)\bullet(x+z)$

4. Ley del complemento

$\forall\, x \in \mathbb{B}\ \exists\, c \in \mathbb{B}$: $x+c=1 \quad \wedge \quad x\bullet c=0$

- En la notación usual, el operador $\bullet$ tiene precedencia sobre el $+$.

Álgebra de Boole

- Pregunta: ¿Es <$\mathbb{R}$, *suma, producto*> un álgebra de Boole?
- Si así lo cree, responda a las siguientes preguntas:
  - ¿Cual sería el elemento nulo?
  - ¿Cual sería el elemento identidad?
  - ¿Se cumplen los postulados anteriores?

1. Ley de identidad

$\forall x \in \mathbb{B}$: $x+0=x \quad \wedge \quad x \bullet 1=x$

2. Ley conmutativa

$\forall x,y \in \mathbb{B}$: $x+y=y+x \quad \wedge \quad x \bullet y=y \bullet x$

3. Ley distributiva

$\forall x,y,z \in \mathbb{B}$: $x \bullet (y+z)=(x \bullet y)+(x \bullet z) \quad \wedge \quad x+(y \bullet z)=(x+y) \bullet (x+z)$

4. Ley del complemento

$\forall x \in \mathbb{B}\ \exists c \in \mathbb{B}$: $x+c=1 \quad \wedge \quad x \bullet c=0$

Álgebra de Boole

- Pregunta: sea *D* un conjunto no vacío y sea *P* el conjunto de todos los subconjuntos de *D* (partes de *D*), ¿Es $<P,\cup,\cap>$ un álgebra de Boole?
- Si así lo cree, responda a las siguientes preguntas:
  - ¿Cual sería el elemento nulo?
  - ¿Cual sería el elemento identidad?
  - ¿Se cumplen los postulados anteriores?

1. Ley de identidad

$\forall\, x \in \mathbb{B}$: $x+0=x \quad \wedge \quad x \bullet 1=x$

2. Ley conmutativa

$\forall\, x,y \in \mathbb{B}$: $x+y=y+x \quad \wedge \quad x \bullet y=y \bullet x$

3. Ley distributiva

$\forall\, x,y,z \in \mathbb{B}$: $x \bullet (y+z)=(x \bullet y)+(x \bullet z) \quad \wedge \quad x+(y \bullet z)=(x+y) \bullet (x+z)$

4. Ley del complemento

$\forall\, x \in \mathbb{B}\ \exists\, c \in \mathbb{B}$: $x+c=1 \quad \wedge \quad x \bullet c=0$

Álgebra de Boole

- Definición: Sean dos elementos x y c de un álgebra de Boole, se dice que c es el *complementario* (o *complemento*) de x si y solo si $x+c=1 \wedge x \bullet c=0$.
- Puede demostrarse que todo álgebre de Boole $<\mathbb{B},+,\bullet>$ cumple los siguientes teoremas:

1) Ley de idempotencia

$\forall x \in \mathbb{B}: \quad x+x=x \quad \wedge \quad x \bullet x=x$

2) Ley de unicidad del complemento

$\forall x \in \mathbb{B}\ \exists!\ c \in \mathbb{B}: \quad x+c=1 \quad \wedge \quad x \bullet c=0$

Esto da pie a definir el operador unario *not* que asocia a cada elemento su complementario. Se representa mediante superrallado.

3) Ley de los elementos dominantes

$\forall x \in \mathbb{B}: \quad x+1=1 \quad \wedge \quad x \bullet 0=0$

4) Ley involutiva

$\forall x \in \mathbb{B}: \quad \overline{\overline{x}}=x$

5) Ley de absorción:

$\forall x,y \in \mathbb{B}: \quad x+(x \bullet y)=x \quad \wedge \quad x \bullet (x+y)=x$

Álgebra de Boole

(continuación de los teoremas)

6) Ley del consenso:

$\forall\, x,y \in \mathbb{B}$: $x+(\overline{x}\bullet y)=x+y \quad \wedge \quad x\bullet(\overline{x}+y)=x\bullet y$

7) Ley asociativa

$\forall\, x,y,z \in \mathbb{B}$: $x+(y+z)=(x+y)+z \quad \wedge \quad x\bullet(y\bullet z)=(x\bullet y)\bullet z$

esto permite omitir paréntesis en muchas expresiones

8) Ley de De Morgan:

$\forall\, x,y \in \mathbb{B}$: $\overline{x\bullet y}=\overline{x}+\overline{y} \quad \wedge \quad \overline{x+y}=\overline{x}\bullet\overline{y}$

9) Ley de De Morgan generalizada:

$\forall\, x,y,z,\ldots \in \mathbb{B}$: $\overline{x\bullet y\bullet z\bullet\ldots}=\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}+\ldots \quad \wedge$

$\overline{x+y+z+\ldots}=\overline{x}\bullet\overline{y}\bullet\overline{z}\bullet\ldots$

10)Ley del consenso generalizado:

$\forall\, x,y,z \in \mathbb{B}$: $(x\bullet y)+(\overline{x}\bullet z)+(y\bullet z)=(x\bullet y)+(\overline{x}\bullet z) \quad \wedge$

$(x+y)\bullet(\overline{x}+z)\bullet(y+z)=(x+y)\bullet(\overline{x}+z)$

Álgebra de Boole

- Los teoremas anteriores se han numerado porque cada uno de ellos se puede demostrar usando los postulados o/y teoremas previamente demostrados.
- Principio de dualidad: Todo postulado, teorema o demostración (en el que no se hayan omitido los paréntesis) del álgebra de Boole se transforma en otro postulado, teorema o demostración igualmente válido si se intercambia el 0 por el 1 y el + por el •.

$$x + 0 = x \qquad\qquad x \cdot 1 = x$$

- Ejemplo: Demostración algebraica de los teoremas 5a y 5b:

$$x + x \cdot y \underset{P1b}{=} x \cdot 1 + x \cdot y \underset{P3a}{=} x \cdot (1+y) \underset{P2b}{=} x \cdot (y+1) \underset{T3a}{=} x \cdot 1 \underset{P1b}{=} x$$

POSTULADOS/
TEOREMAS
DUALES

$$x \cdot (x+y) \underset{P1a}{=} (x+0) \cdot (x+y) \underset{P3b}{=} x + 0 \cdot y \underset{P2a}{=} x + y \cdot 0 \underset{T3b}{=} x+0 \underset{P1a}{=} x$$

Álgebra de conmutación

- El <u>álgebra de conmutación</u> es un caso especial del álgebra de Boole en el que los únicos valores booleanos son el 1 y el 0, es decir, $\mathbb{B}=\{0,1\}$.
- A los elementos del álgebra de conmutación se le llaman *valores lógicos*.
- Dado que el conjunto de valores lógicos es finito, cualquier operador interno de un álgebra de conmutación puede definirse usando una tabla con tantas entradas como elementos tenga el conjunto origen. A dicha tabla se le llama *tabla de verdad*.
- Preguntas sobre el álgebra de conmutación:
  - ¿Cuál es la tabla de verdad del complemento (NOT)?
  - ¿A qué es igual $\mathbb{B}^2$ en el álgebra de conmutación?
  - ¿Cuál es la tabla de verdad de +?
  - ¿Cuál es la tabla de verdad de •?

Operadores lógicos

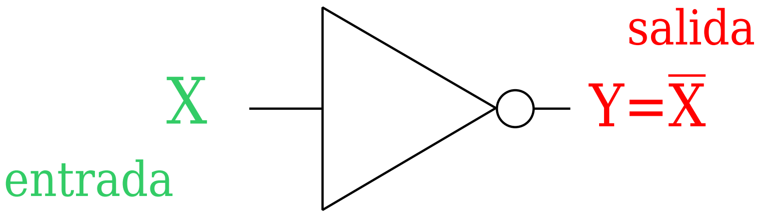
- Operadores del álgebra de conmutación de uso frecuente:

Nombre del operador	Representaciones
IDENTIDAD	X
NOT	$\overline{X}$,NOT X, /X,X', #X
OR	X+Y, X OR Y
NOR	$\overline{X+Y}$, X NOR Y
AND	X·Y, X AND Y, X&Y
NAND	$\overline{X \cdot Y}$, X NAND Y
XOR,EXOR,EOR	X⊕Y, X EXOR Y
XNOR	X↔Y, X XNOR Y

- Los dispositivos que calculan exclusivamente uno de estos operadores se denominan *puertas lógicas*.

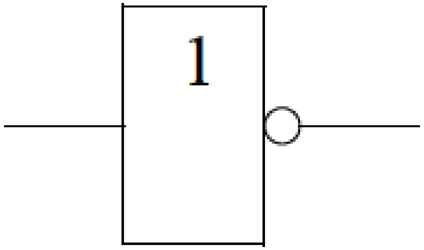
Operadores lógicos

- símbolos de las puertas que implementan los operadores:
- NOT (inversor)



X	Y
0	1
1	0

Tabla de verdad

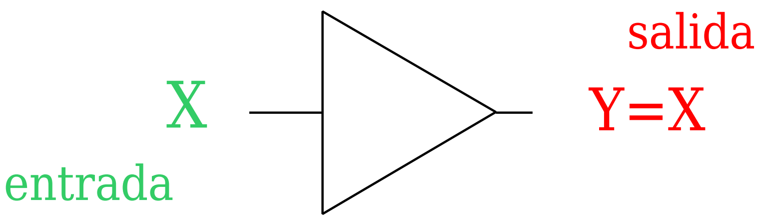


(Institute of Electrical and Electronics Engineers)

Símbolo IEEE

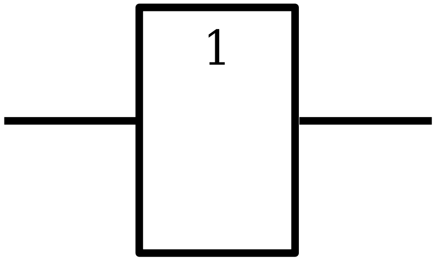
Operadores lógicos

- símbolos de las puertas que implementan los operadores:
- BUFFER (identidad)



X	Y
0	**0**
1	**1**

Tabla de verdad

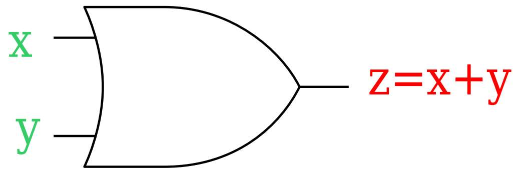


Símbolo IEEE

(Institute of Electrical and Electronics Engineers)

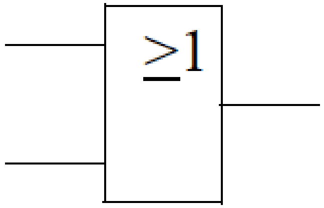
Operadores lógicos

- símbolos de las puertas que implementan los operadores:
- OR



X Y	Z
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	1

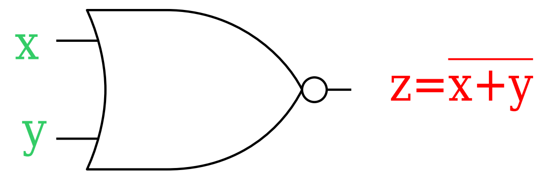
Tabla de verdad



Símbolo IEEE

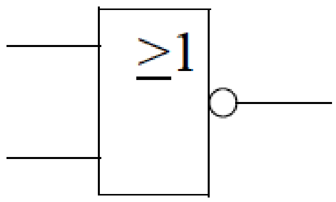
Operadores lógicos

- símbolos de las puertas que implementan los operadores:
- NOR



X Y	Z
0 0	1
0 1	0
1 0	0
1 1	0

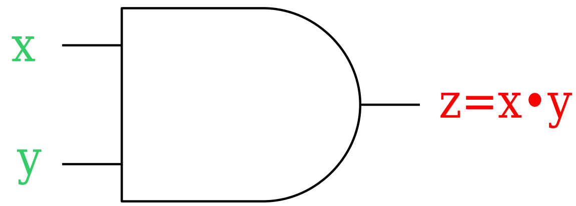
Tabla de verdad



Símbolo IEEE

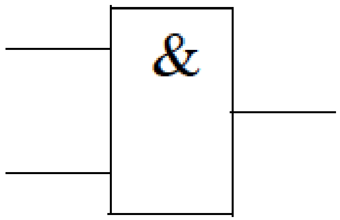
Operadores lógicos

- símbolos de las puertas que implementan los operadores:
- AND



X Y	**Z**
0 0	0
0 1	0
1 0	0
1 1	1

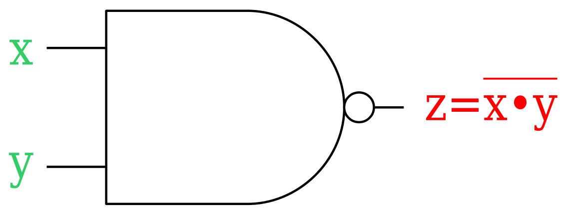
Tabla de verdad



Símbolo IEEE

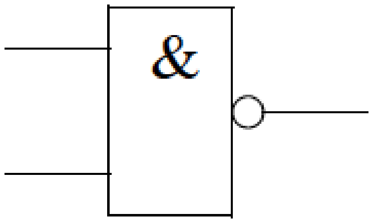
Operadores lógicos

- símbolos de las puertas que implementan los operadores:
- NAND



X Y	Z
0 0	1
0 1	1
1 0	1
1 1	0

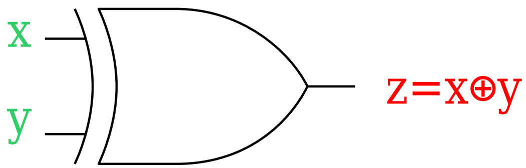
Tabla de verdad



Símbolo IEEE

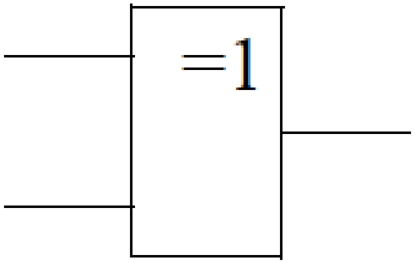
Operadores lógicos

- símbolos de las puertas que implementan los operadores:
- EXOR



X Y	Z
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	0

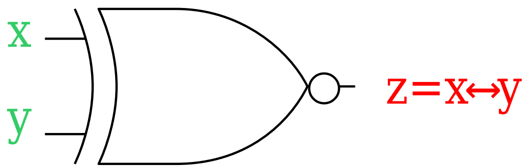
Tabla de verdad



Símbolo IEEE

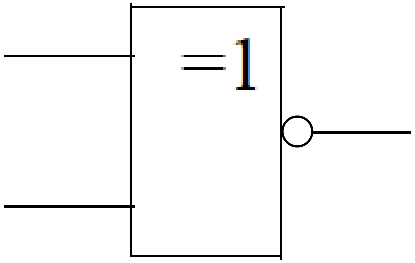
Operadores lógicos

- símbolos de las puertas que implementan los operadores:
- XNOR



X Y	Z
0 0	1
0 1	0
1 0	0
1 1	1

Tabla de verdad



Símbolo IEEE

Operadores lógicos

- Los operadores $+$, $\bullet$, $\oplus$ y $\leftrightarrow$ son conmutativos y asociativos, lo que permite omitir paréntesis en muchas expresiones sin que haya ambigüedad. Por ejemplo:

$$v+(x+(y+z))=((v+x)+y)+z=(v+x)+(y+z)=v+x+y+z$$

$$v\bullet(x\bullet(y\bullet z))=((v\bullet x)\bullet y)\bullet z=(v\bullet x)\bullet(y\bullet z)=v\bullet x\bullet y\bullet z$$

$$v\oplus(x\oplus(y\oplus z))=((v\oplus x)\oplus y)\oplus z=(v\oplus x)\oplus(y\oplus z)=v\oplus x\oplus y\oplus z$$

$$v\leftrightarrow(x\leftrightarrow(y\leftrightarrow z))=((v\leftrightarrow x)\leftrightarrow y)\leftrightarrow z=(v\leftrightarrow x)\leftrightarrow(y\leftrightarrow z)=v\leftrightarrow x\leftrightarrow y\leftrightarrow z$$

- Esto da pie a definir generalizaciones de esos operadores cuyas entradas son listas de un número cualquiera de elementos booleanos.
- Los operadores complementarios a estos (NAND, NOR) pueden generalizarse de forma similar.
- Las puertas que implementan esos operadores generalizados pueden tener, por tanto, más de dos entradas.

Tecnologías de implementación

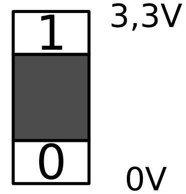
Para construir máquinas calculadoras se han usado distintas tecnologías:

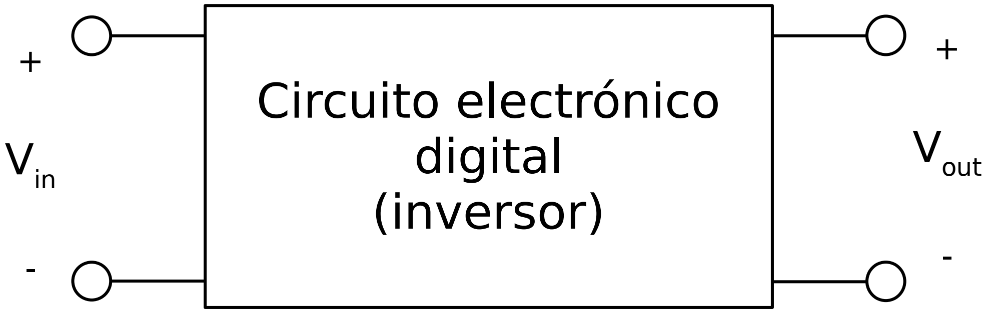
- Mecánica (ruedas dentadas, tarjetas perforadas, etc)
  - Pascaline (Blaise Pascal)
  - Máquina analítica (Charles Babbage, Percy Edwin)
- Electromecánica (electroimanes, relés)
  - FACOM 100/128 (Fujitsu)
- Electrónica (tubos de vacío, transistores)

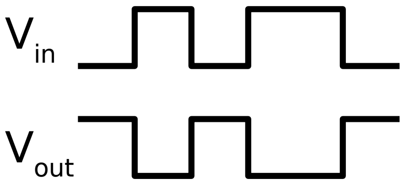
Implementación electrónica

- En electrónica de conmutación los valores lógicos se representan con magnitudes eléctricas, usualmente tensiones. Existen dos alternativas:
  - Lógica positiva: El valor nominal más alto de la magnitud (H) representa el 1, mientras que el más bajo (L) representa el 0.
  - Lógica negativa: El valor nominal más alto de la magnitud (H) representa el 0, mientras que el más bajo (L) representa el 1.
- Ejemplo:

tensión	valor lógico
0V	0
3,3V	1



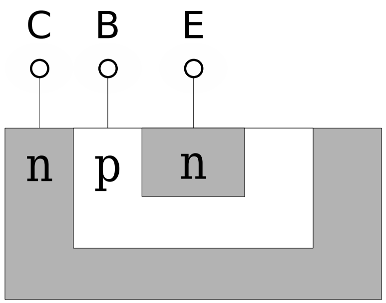


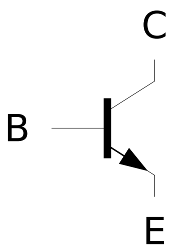


Implementación electrónica

- Para implementar operadores de conmutación, en tecnología electrónica se emplean unos dispositivos denominados *transistores* construidos con materiales de características eléctricas especiales denominados *semiconductores*.
- Hay diversas características que nos permiten clasificar a los transistores:
  - Material semiconductor empleado para construirlos
    - Germanio
    - Galio
    - Silicio
  - Principio físico de funcionamiento
    - Desplazamiento de portadores de carga (bipolares)
    - Efecto campo (MOSFET, FET)
  - Geometría (dimensiones)

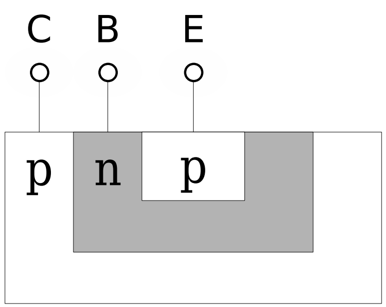
Transistores bipolares



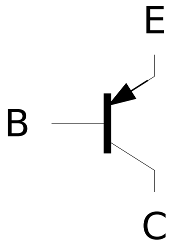


NPN

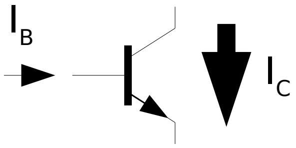
n: más electrones libres
p: más huecos libres



C: Colector
B: Base
E: Emisor



PNP



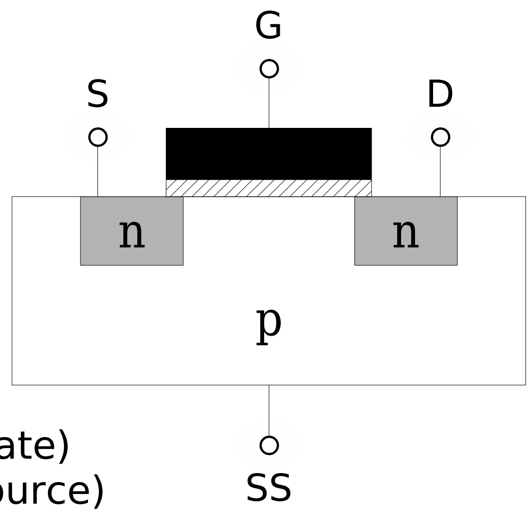
$$I_C = \beta \, I_B$$
$$\beta \approx 100$$

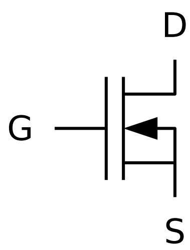
Un pequeña corriente entre B y E permite que una gran corriente pase de C a E.

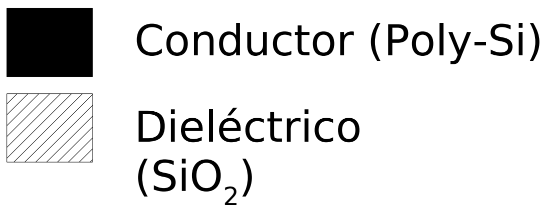
Aplicación: amplificadores, sensores, etc.

Transistores de efecto campo
Ej: MOSFET

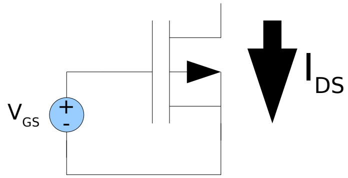
nMOS



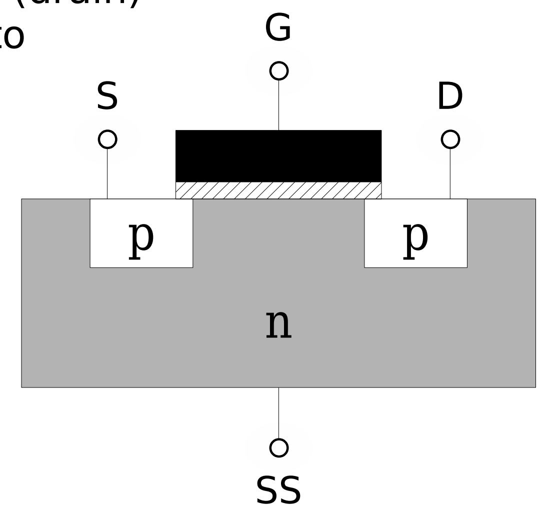


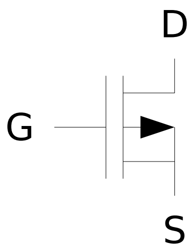


G: puerta (gate)
S: fuente (source)
D: drenador (drain)
SS: substrato



pMOS

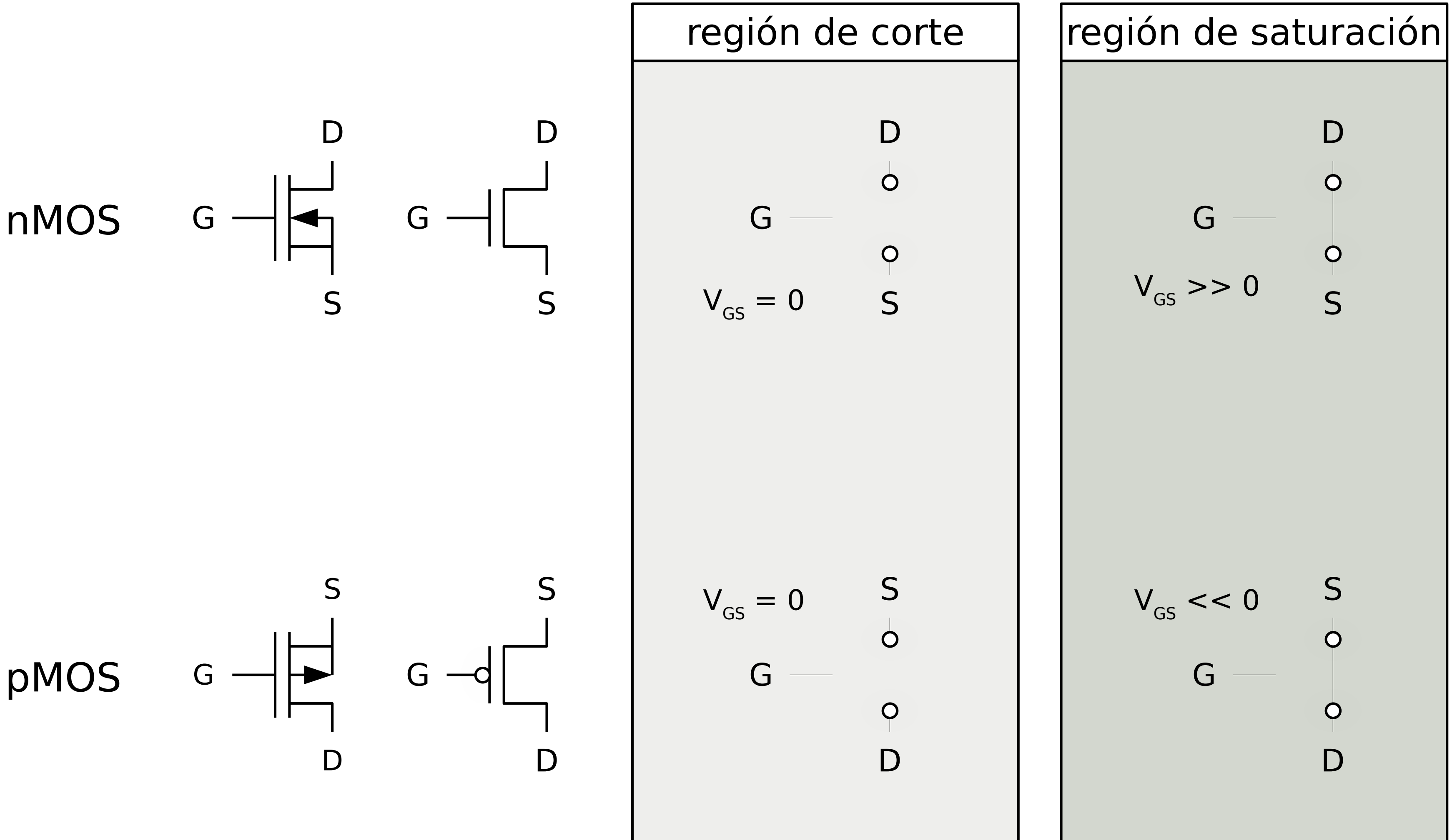




Una pequeña tensión entre G y S permite que una gran corriente pase de D a S.

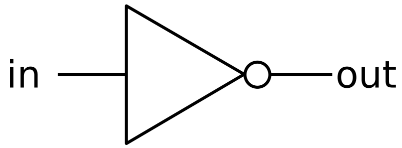
Aplicación: amplificadores, sensores, etc.

Transistores en conmutación

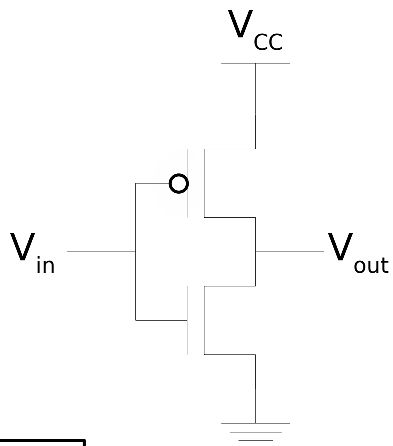


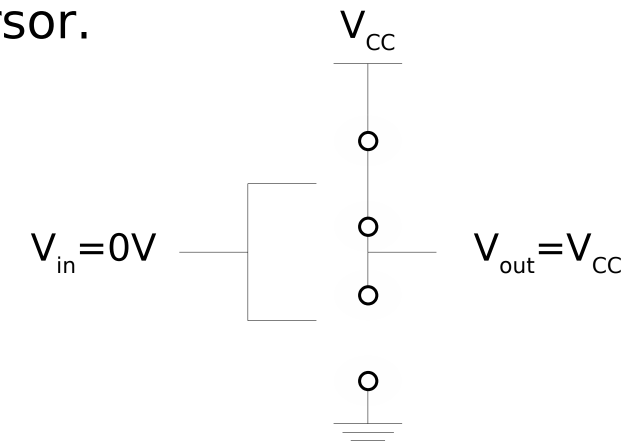
Puertas lógicas. Inversor CMOS

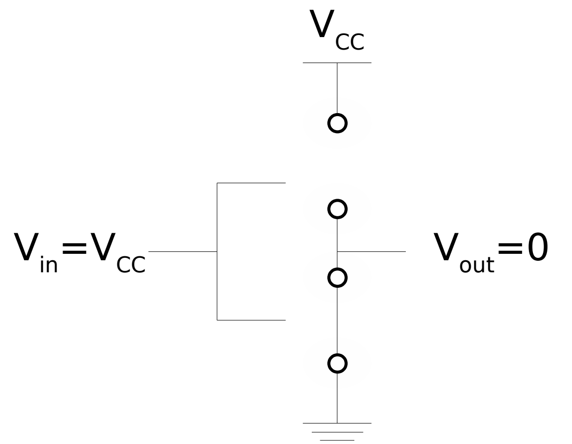
- Las puertas lógicas realizan operaciones simples sobre señales digitales.
- La operación digital más simple (salvo la identidad) es la inversión, implementada por el inversor.



in	out
0	1
1	0

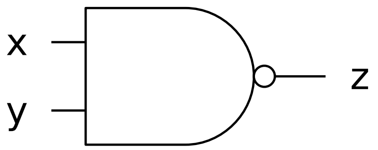




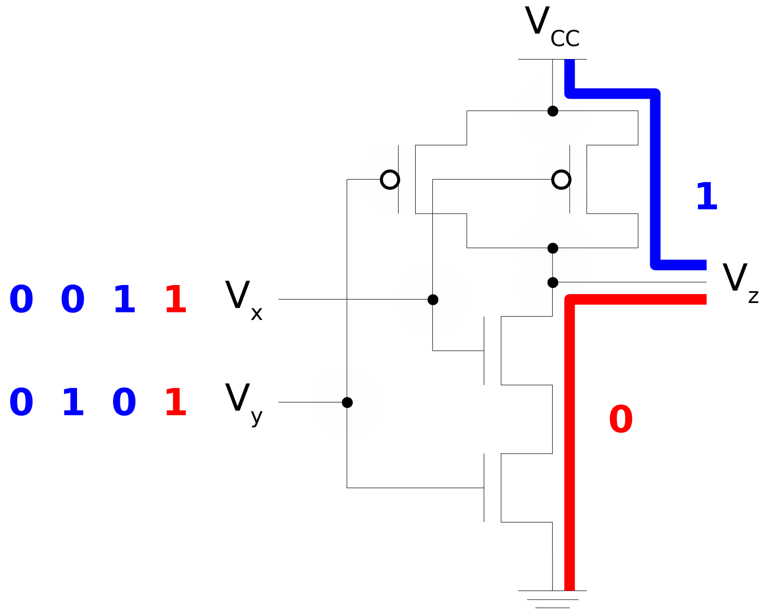


Simulación

Puertas lógicas. NAND CMOS

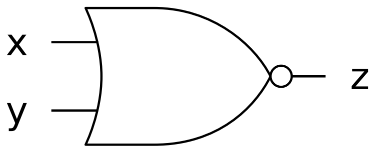


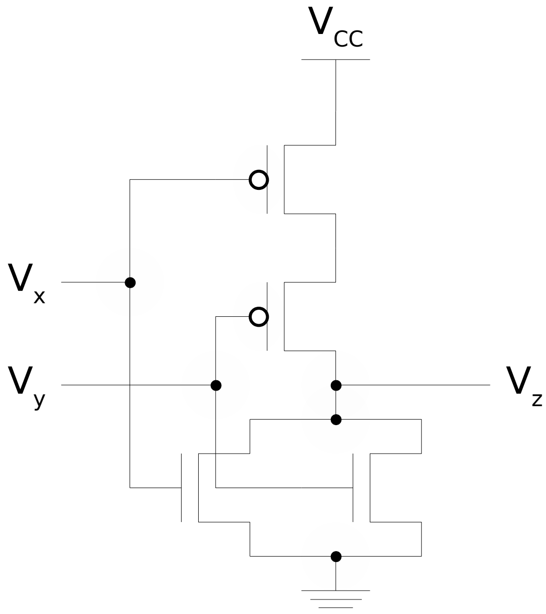
Las puertas CMOS son "naturalmente" inversoras (INV, NAND, NOR, ...)



Simulación

Puertas lógicas. NOR CMOS

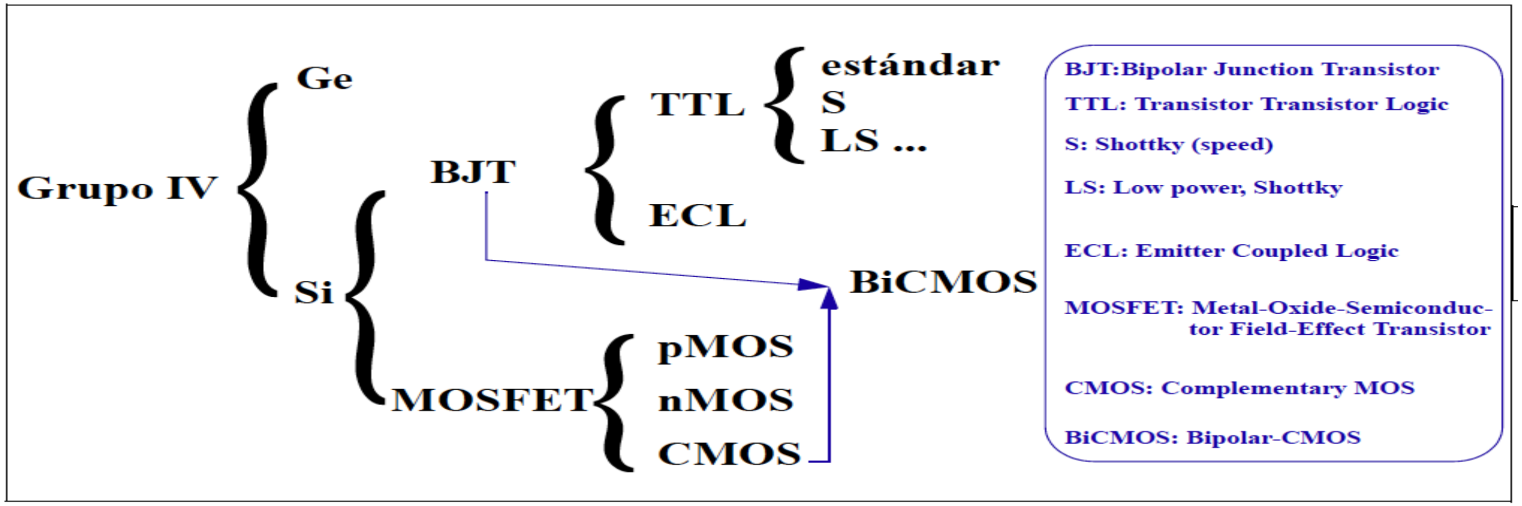




Simulación

Familias lógicas

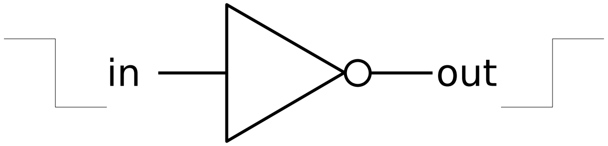
- Hay diferentes tipos de transistores y, para cada tipo, diferentes geometrías y formas de conectarlos para hacer puertas.
- **Familia lógica**: Conjunto de puertas que son similares en cuanto a diseño y tecnología de fabricación.
- Las puertas de una misma familia lógica son compatibles entre si y tienen características eléctrico-temporales similares.
- Algunas familias lógicas son compatibles con otras.
- Dentro de una familia, hay *subfamilias*.

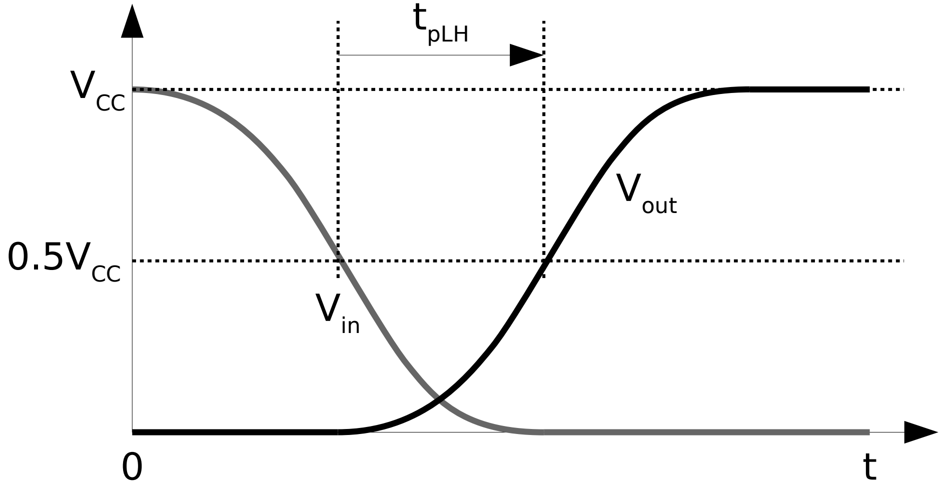


Parámetros eléctrico-temporales

- Tiempos de propagación
- Tiempos de transición
- Fan-in / Fan-out
- Niveles lógicos “altos” y “bajos”, márgenes de ruido (ver apéndices)
- Potencia consumida (ver apéndices)

Parámetros temporales: tiempos de propagación (retraso)

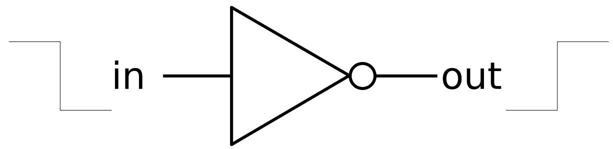


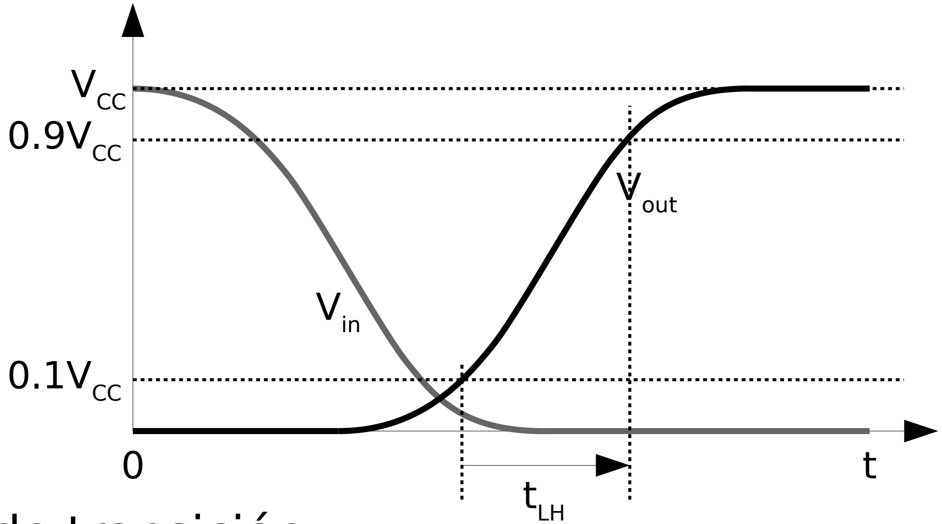


Simulación

Retrasos de propagación mayores hacen que los circuitos digitales (computadores) sean más lentos

Parámetros temporales: tiempos de transición

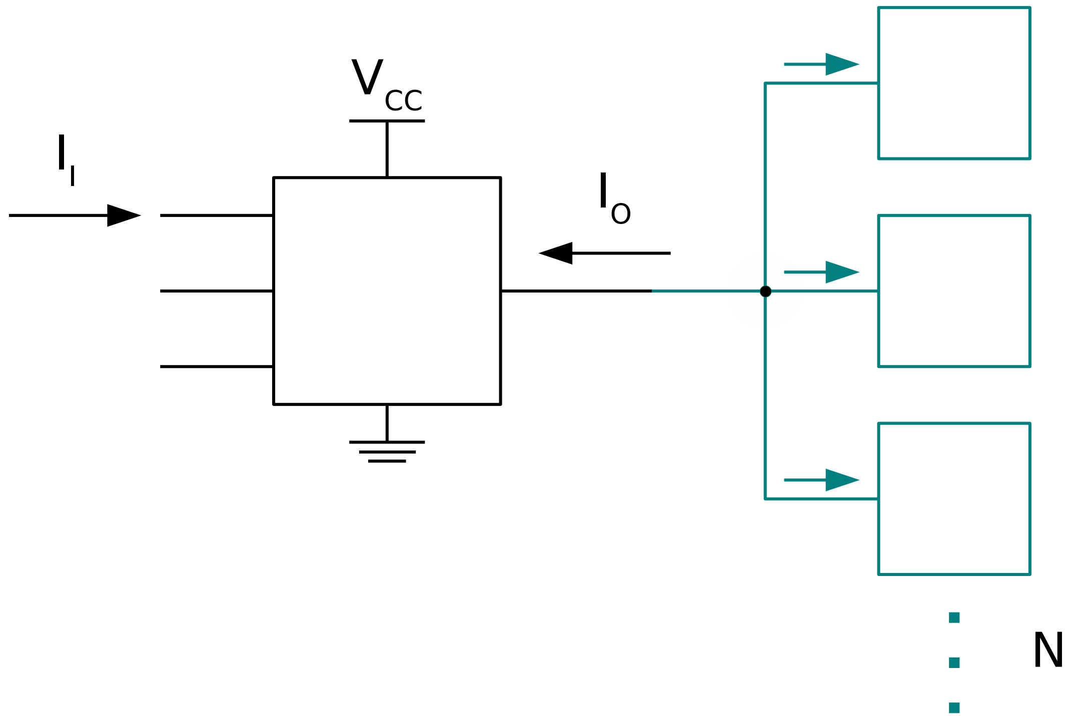




Simulación

- Tiempo de transición:
  - De 10% V_{CC} a 90% V_{CC} (transición de subida): t_R o t_{LH}
  - De 90% V_{CC} a 10% V_{CC} (transición de bajada): t_F o t_{HL}

Parámetros electrico-temporales: Fan-in, Fan-out



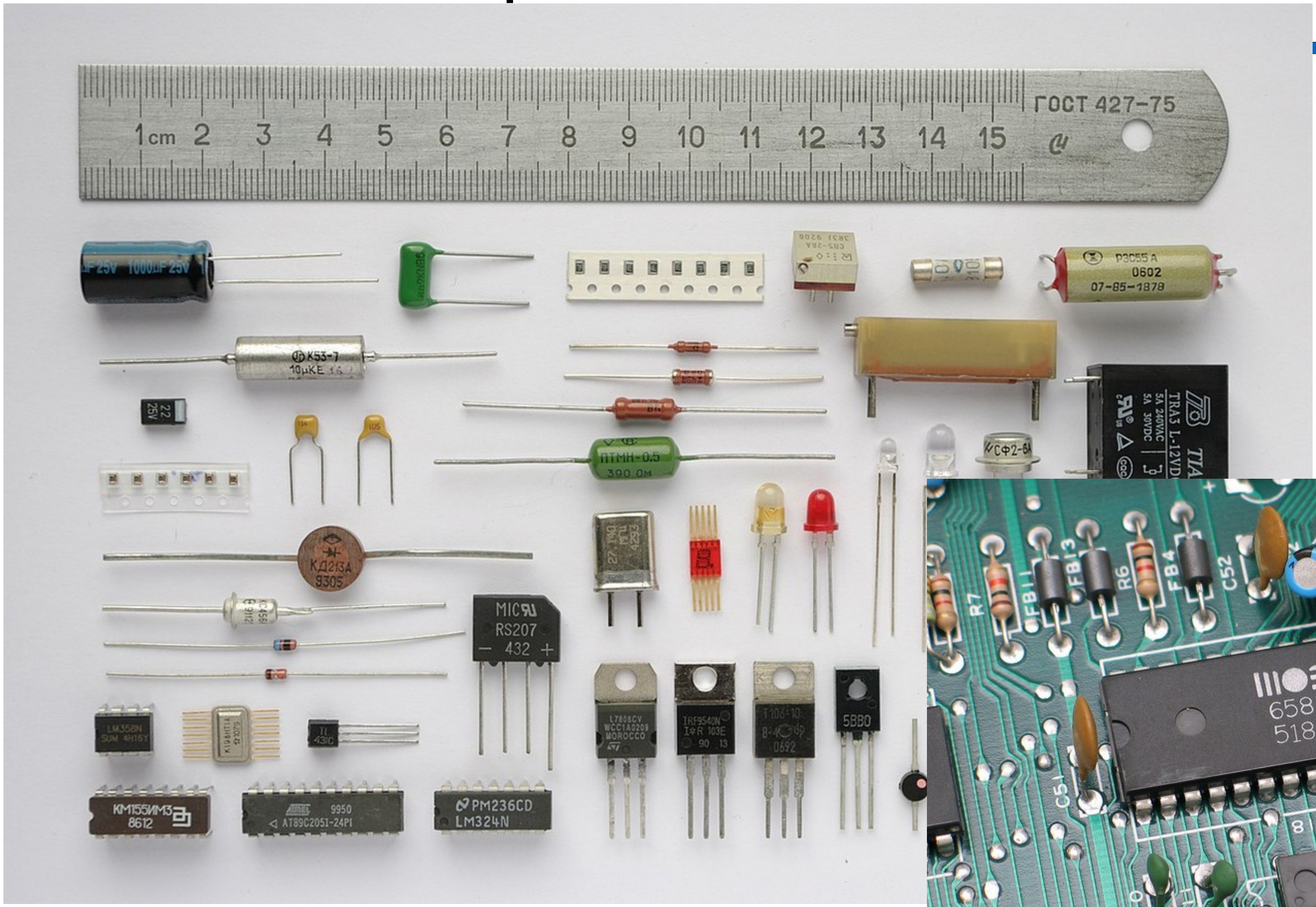
$|I_O| > |N \times I_I|$

- FAN-IN: Número máximo de entradas posible
- FAN-OUT: Número máximo de dispositivos que pueden conectarse a la salida
- Limitaciones:
  - $|I_O| > |N \times I_I|$ en ambos casos (salida alta y baja)
  - tiempos de transición y/o propagación

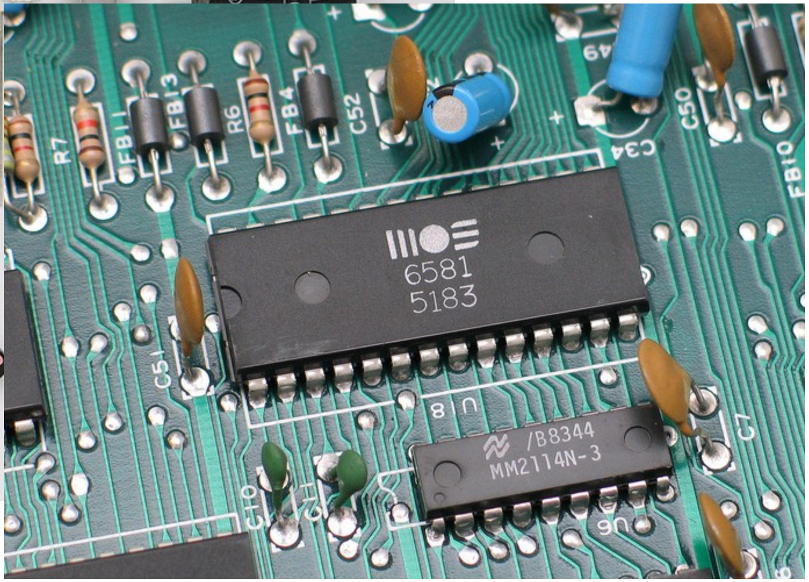
Fabricación de circuitos electrónicos

- Lógica discreta: Los componentes del circuito se fabrican por separado y se conectan posteriormente.
- Lógica integrada: Los componentes del circuito y sus líneas de interconexión se fabrican juntos en el mismo trozo de oblea de material semiconductor. El resultado se denomina circuito integrado (CHIP).
  - Grandes números: de 10 a >1000 millones de transistores en un sólo chip.
  - La mayoría de la electrónica moderna son C.I.
  - Tipos:
    - de aplicación específica (ASIC)
    - configurables (ej: FPGA, PAL, CPLD)

Componentes electrónicos

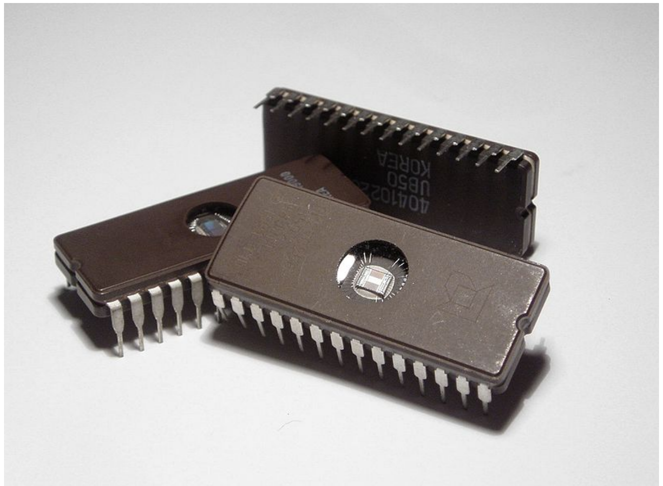


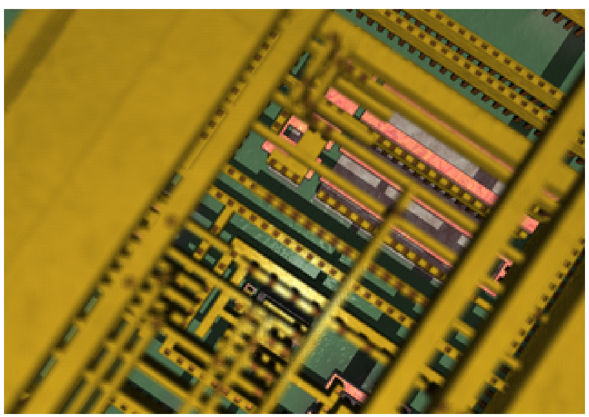
By Kae - Own work, Public Domain
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=655329

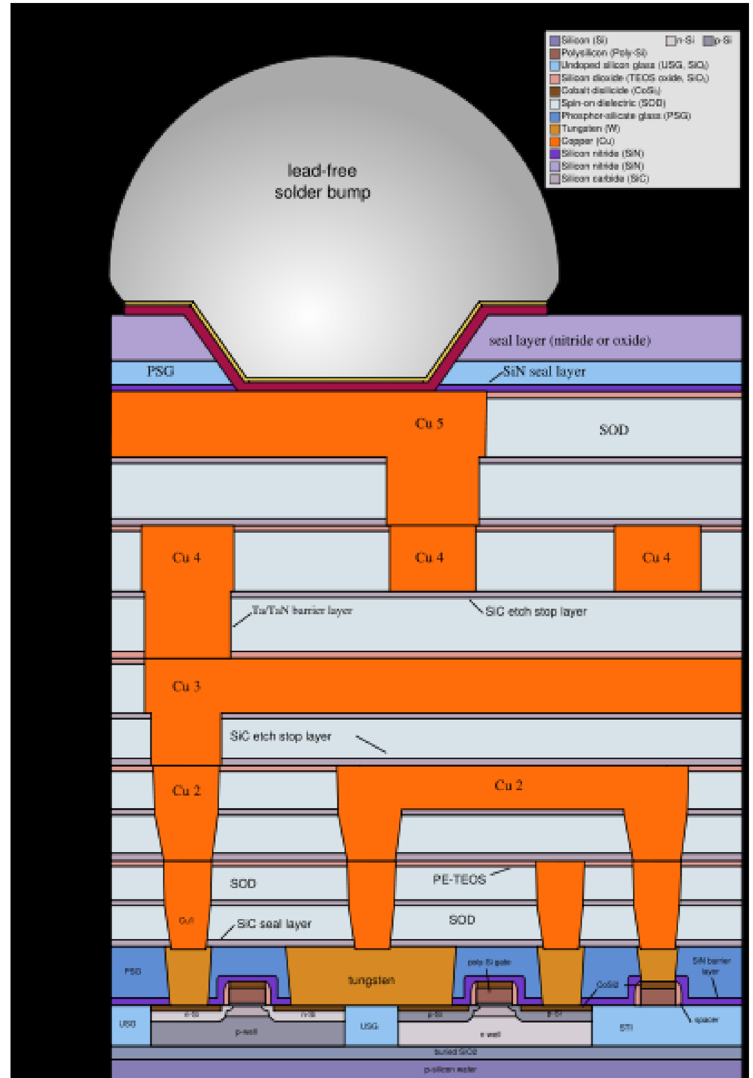


By Christian Taube - Own work, CC BY-SA 2.5,
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1503038

Circuitos integrados







http://en.wikipedia.org/wiki/Integrated_circuit

Autoevaluación

Haga los ejercicios 16, 17 y 18 de
https://www.dte.us.es/docencia/etsii/gii-ti/cedti/problemas/problemas-3.pdf

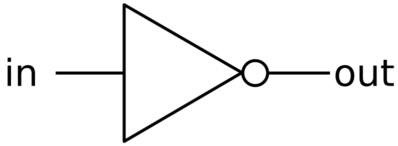
Apéndices

Parámetros eléctricos: Niveles lógicos y margen de ruído

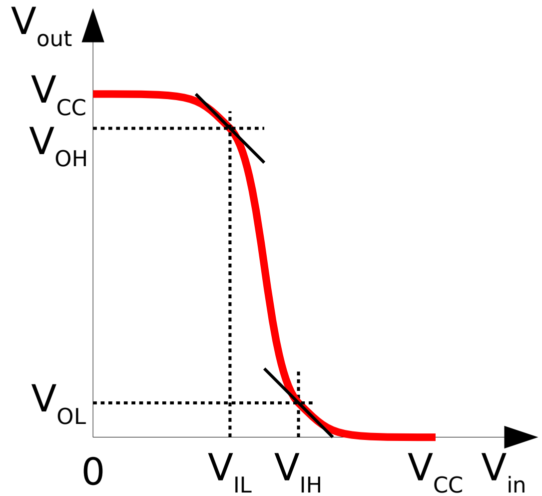
	lógica positiva	lógica negativa
valores lógicos altos	magnitudes que representan 1	magnitudes que representan 0
valores lógicos bajos	magnitudes que representan 0	magnitudes que representan 1

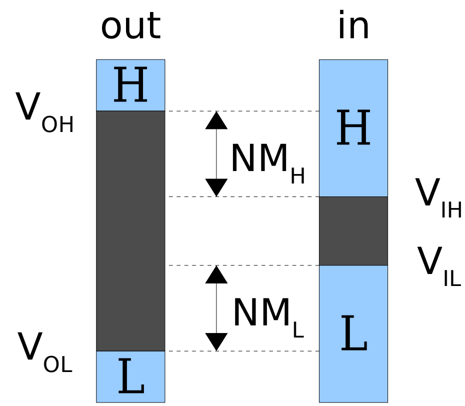
- Los conjuntos de valores lógicos altos y bajos se definen por convenio. Por ejemplo, en RS-232 son [-15V,-3V] y [3V,15V].
- Deben ser rangos disjuntos.
  - IL max: máximo del conjunto de valores lógicos bajos.
  - IH min: mínimo del conjunto de valores lógicos altos.
- Por convenio se definen unas magnitudes de ruido tolerables:
  - NMH>0: margen de ruido alto.
  - NML>0: margen de ruido bajo.
- Las puertas deben regenerar los valores:
  - Si la salida debe tener un valor lógico alto, entonces debe ser, como mínimo, OH min= IH min + NMH
  - Si la salida debe tener un valor lógico bajo, entonces debe ser, como máximo, OL max= IL max - NML

Parámetros eléctricos: Niveles lógicos y margen de ruído

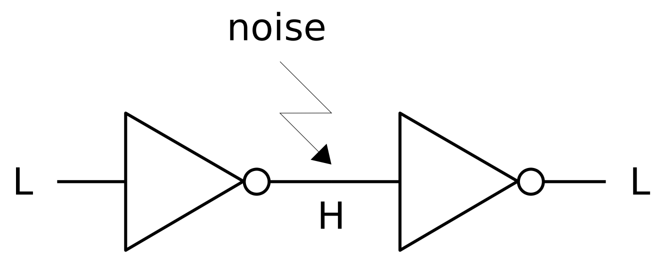


$NM_L = V_{IL} - V_{OL}$
$NM_H = V_{OH} - V_{IH}$
$NM = \min(NM_L, NM_H)$



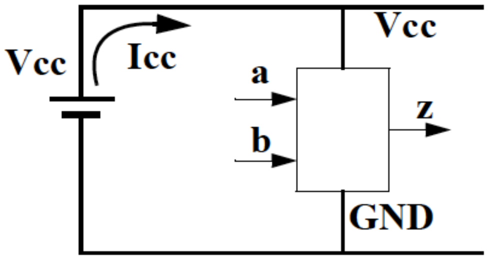


Valores para la familia 74LS					
V_{IH} min	**V_{OH} min**	**NMH**	**V_{IL} max**	**V_{OL} max**	**NML**
2v	**2.4v**	**0.4v**	**0.8v**	**0.4v**	**0.4v**



Simulación

Parámetros eléctricos: potencia consumida



- P=V×I
- La potencia consumida por un circuito digital tiene dos componentes:
  - Estática: La que se consume siempre que el circuito esté alimentado. Puede disminuirse bajando la tensión de alimentación.
  - Dinámica: La que se consume sólo cuando cambia alguna entrada. Puede disminuirse bajando la frecuencia con la que cambian las entradas.
- Genera calor.
- Es de gran importancia, especialmente en equipos portátiles.

Circuitos integrados. Generaciones

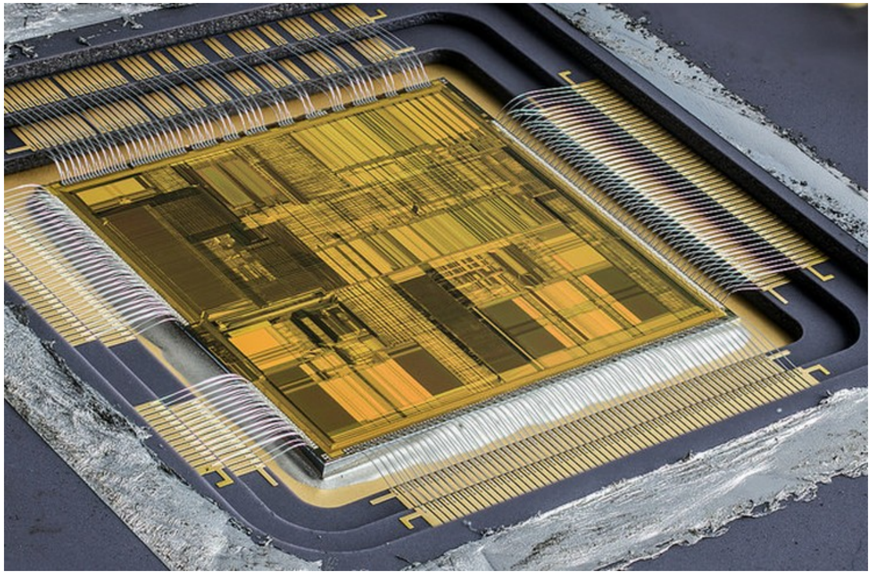
Nombre	Significado	Año	No. tt	
SSI	Small-scale integration	1964	1 a 10	Aplicaciones militares y espaciales
MSI	Medium-scale integration	1968	10 a 500	Uso en productos de consumo
LSI	Large-scale integration	1971	500 a 20000	Microprocesadores y memorias integradas
VLSI	Very large-scale integration	1980	20000 a 1M	Procesadores y memorias avanzados. Automatización
ULSI	Ultra-large-scale integration	1984	> 1M	System on Chip (SoC)

https://en.wikipedia.org/wiki/Integrated_circuit

Circuitos integrados. Tipos

Aplicación específica (ASIC)

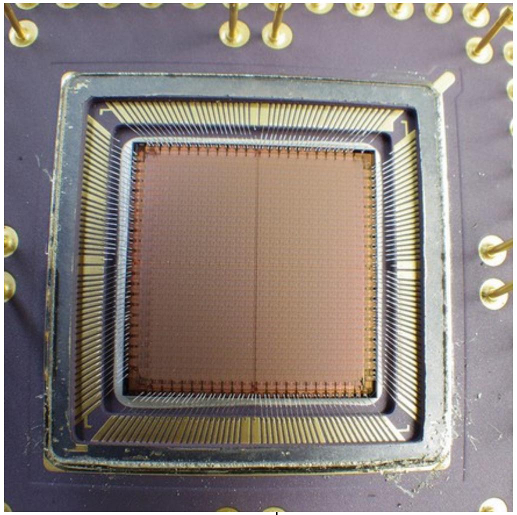
Intel Pentium

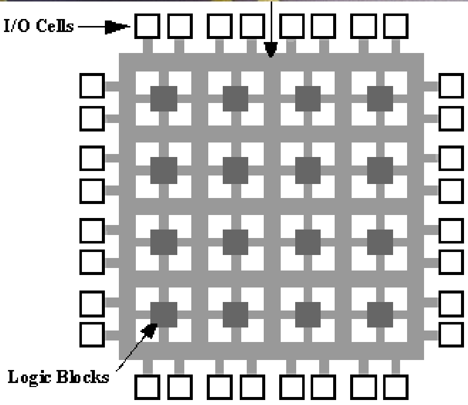


Dominio Público
https://www.flickr.com/photos/130561288@N04/16637740870

Configurables (ej. FPGA)

Xilinx XC4010-6





http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Fpga1a.gif

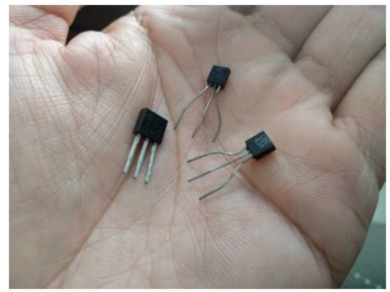
Xilinx XC4010-6. Dominio Público
https://www.flickr.com/photos/34923408@N07/22054207552/

Evolución

Válvulas

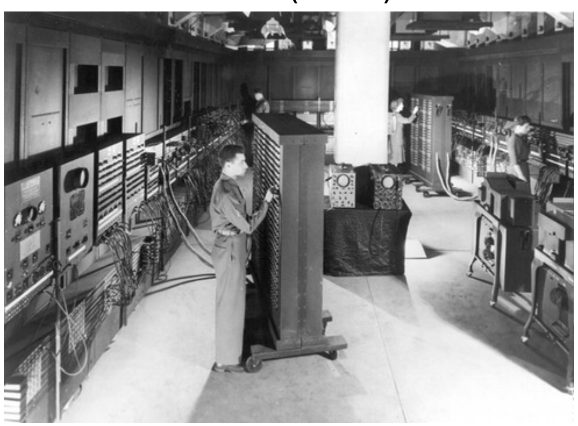
By Kguirnela - Own work, CC BY 3.0
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=3820451

Transistores



Intel Pentium IV (~50Mtt)

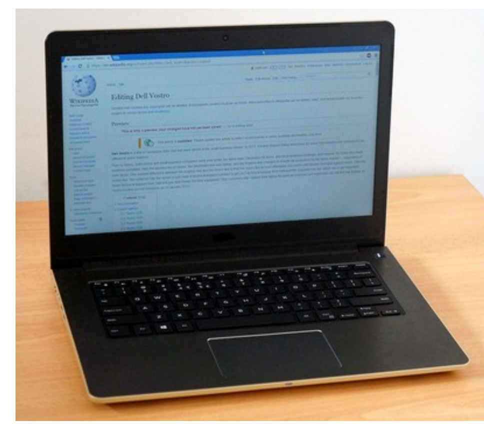
ENIAC (1946)



By Unidentified U.S. Army photographer, Public Domain
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=978770

IBM 360 Model 20 (1966)

By Ben Franske - DM IBM S360.jpg on en.wiki, CC BY 2.5
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1189162

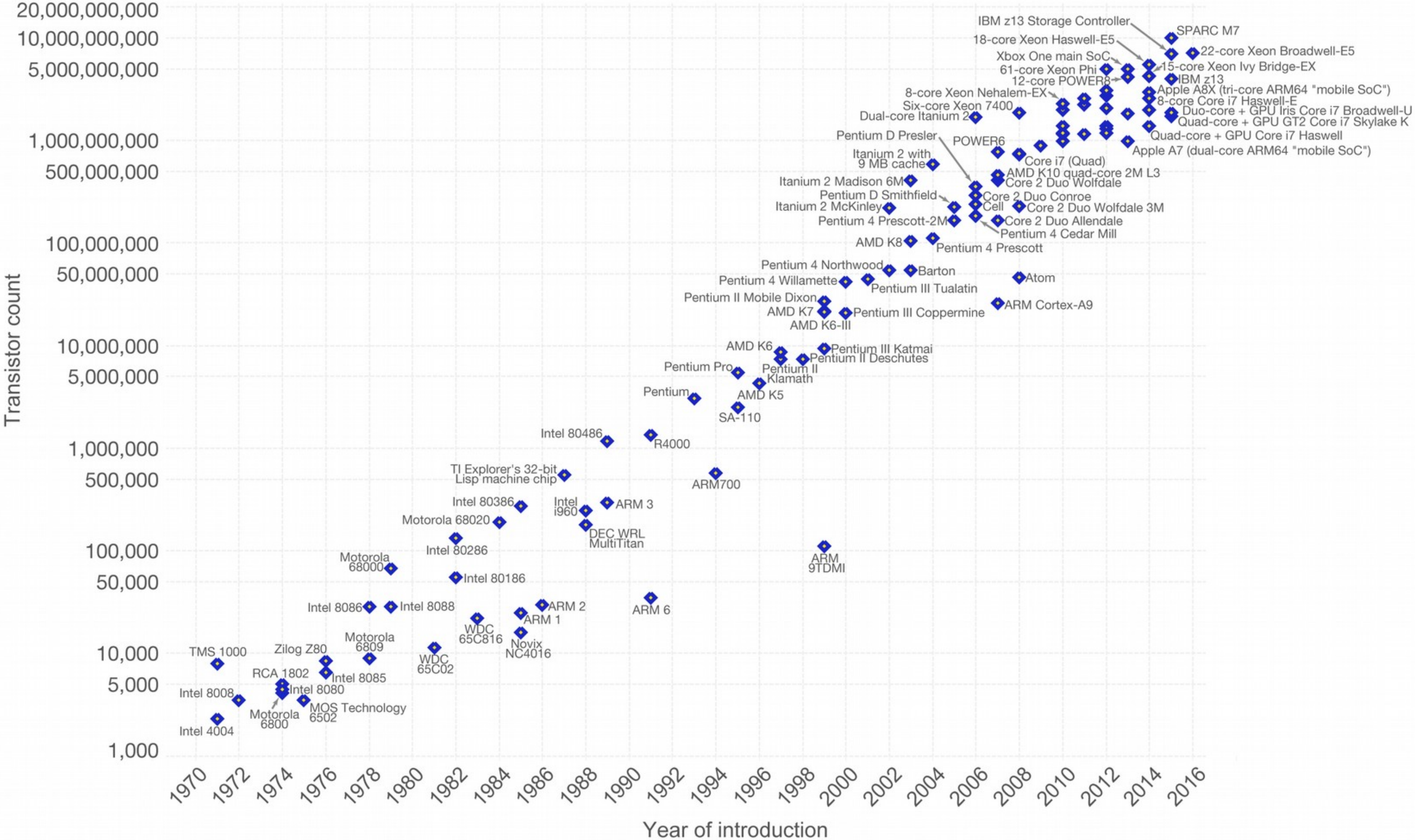


By Vostrouser - Own work, CC0
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=47766991

Moore's Law – The number of transistors on integrated circuit chips (1971-2016)

Our World in Data

Moore's law describes the empirical regularity that the number of transistors on integrated circuits doubles approximately every two years. This advancement is important as other aspects of technological progress – such as processing speed or the price of electronic products – are strongly linked to Moore's law.



Data source: Wikipedia (https://en.wikipedia.org/wiki/Transistor_count)

The data visualization is available at OurWorldinData.org. There you find more visualizations and research on this topic.