# Circuitos electrónicos digitales

**Universidad de Sevilla**

12/11/2024 14:39:53

# Tema 6

## Unidades aritméticas y lógicas

# Introducción

- Los computadores pueden ejecutar operaciones aritméticas y lógicas.
- Una operación de cálculo en un computador puede ser realizado de dos formas:
  - *Hardware*: un circuito realiza completamente esa operación.
  - *Software*: un programa descompone esa operación en otras más elementales que son realizadas mediante hardware.

# Introducción

- Hardware de cálculo numérico en los procesadores:
  - Todos los procesadores disponen de los componentes necesarios para sumar y restar enteros por hardware.
  - Algunos pueden realizar por hardware otras operaciones enteras más complejas como multiplicación o división entera.
  - Algunos incluso pueden realizar por hardware operaciones con números no enteros, algunas tan complejas como exponenciales, logaritmos o funciones trigonométricas.

# Introducción

La aritmética de un computador digital tiene ciertas peculiaridades:

- La base del sistema de numeración suele ser 2 (binaria).
- El código empleado para representar conjuntamente enteros mayores y menores que cero (notación con signo) normalmente no es signo-magnitud.
- A menudo, el número de bits disponible para representar un número tiene una cota predeterminada, lo que limita la precisión y el rango de valores representables.

# Aritmética binaria: operaciones básicas

## Suma aritmética

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0 \\ +\quad\ 1\ 1\ 0\ 1 \\ \hline \end{array}$$

# Aritmética binaria: operaciones básicas

Suma aritmética

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | Acarreo (carry) |
| | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 Sumando 1 |
| + | | | 1 | 1 | 0 | 1 Sumando 2 |
| | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 Suma |

# Aritmética binaria: operaciones básicas

Resta

$$\begin{array}{rcccccc} & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ - & & & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

# Aritmética binaria: operaciones básicas

Resta

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | Minuendo |
| - | | | 1 | 1 | 0 | 1 | Sustraendo |
| | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | | Préstamo (borrow) |
| | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | Resta |

# Aritmética binaria: operaciones básicas

## Multiplicación

$$
\begin{array}{cccccc}
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
X & & 1 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

# Aritmética binaria: operaciones básicas

Multiplicación (algoritmo de sumas y desplazamientos, no óptimo)

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | Multiplicando |
| | | | X | | 1 | 1 | 0 | 1 | Multiplicador |
| | | | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | |
| | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | | | |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | | | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | Multiplicación |

# Aritmética binaria: operaciones básicas

División

1 0 0 1 1 0 | 1 1 0 1

# Aritmética binaria: operaciones básicas

## División (algoritmo no óptimo)

| Dividendo | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | ← | 1 1 0 1 | Divisor |
| - | | 1 | 1 | 0 | 1 | | | 1 0 | Cociente |
| | | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | | | |
| - | | | 0 | 0 | 0 | 0 | | | |
| | | | 1 | 1 | 0 | 0 | Resto | | |

# Operador módulo: definición

- Sea $x \in \mathbb{Z}$ y sea $m \in \mathbb{N}$, se define $x \bmod m$ como el número $r \in \mathbb{Z}_m$ tal que $x-r$ es múltiplo de $m$.
- Es fácil demostrar que $x \bmod m$ es único.
- Ejemplos:

  $23 \bmod 5 = 3$

  $-30 \bmod 8 = 2$

  $4 \bmod 20 = 4$

  $-4 \bmod 20 = 16$

- El operador módulo suele tener la menor precedencia, es decir, $a+b \bmod m = (a+b) \bmod m$ , $a-b \bmod m = (a-b) \bmod m$, $a \times b \bmod m = (a \times b) \bmod m$.

# Operador módulo: propiedades

- Si $x \geq 0$, $x \bmod m$ es el resto de dividir $x$ entre $m$.
- Si $x$ es múltiplo de $m$, $x \bmod m = 0$.
- Si $x \in \mathbb{Z}_m$, $x \bmod m = x$.
- $(f+g) \bmod m = [(f \bmod m)+g] \bmod m = [f+(g \bmod m)] \bmod m =$

  $= [(f \bmod m)+(g \bmod m)] \bmod m$
- $(f-g) \bmod m = [(f \bmod m)-g] \bmod m = [f-(g \bmod m)] \bmod m =$

  $= [(f \bmod m)-(g \bmod m)] \bmod m$
- $(f \times g) \bmod m = [(f \bmod m) \times g] \bmod m = [f \times (g \bmod m)] \bmod m =$

  $= [(f \bmod m) \times (g \bmod m)] \bmod m$

# Operador módulo: ejercicios

- Calcule $83141592 \bmod m$ para los siguientes valores de $m$: $10^9$, $10^8$, $10^7$, $10^6$, $10^5$, $10^4$, $10^3$, $10^2$ y $10^1$.
- Represente el número $101100110_{(2} \bmod m$ en base 2 para los siguientes valores de m: $2^{10}$, $2^9$, $2^8$, $2^7$, $2^6$, $2^5$, $2^4$, $2^3$, $2^2$ y $2^1$.
- Represente el número $2143157_{(8} \bmod m$ en base 8 para los siguientes valores de $m$: $8^8$, $8^7$, $8^6$, $8^5$, $8^4$, $8^3$, $8^2$ y $8^1$.
- Calcule $236813 \times 564157 \bmod 10$.
- Represente en base 2 el número $111001101_{(2} \times 101100111_{(2} \bmod 2^2$.

# notaciones con signo

Los códigos binarios para representar número enteros se dividen en dos tipos:

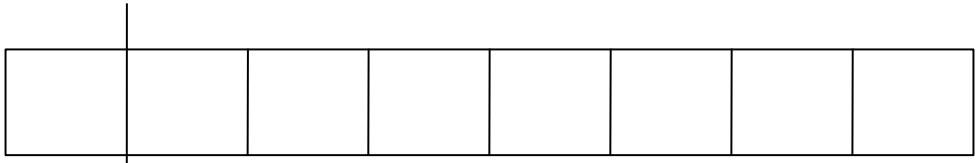
- Sin signo: No permiten representar valores menores que cero.
  - Base 2
  - Gray
- Con signo: Permiten representar valores menores que cero.
  - Notación Signo-Magnitud
  - Notación Complemento a 1
  - Notación Complemento a 2
  - Notación Exceso

# notación signo-magnitud

- El número que representa una cadena de bits A en notación signo-magnitud lo notamos $A_{(S\text{-}M}$
- Con n bits los números representables son los enteros en el intervalo $[-(2^{n-1} - 1), 2^{n-1} - 1]$ (un total de $2^n - 1$)
- Para representar un número $X \geq 0$ se toma una cadena A tal que $A_{(2}=X$. Ejemplo: “01011010”$_{(S\text{-}M}=90$
- Para representar un número $X \leq 0$ se toma una cadena A tal que $A_{(2}=2^{n-1}+|X|$. Ejemplo: “11011010”$_{(S\text{-}M}=-90$
- Cualquier cadena con los n-1 bits menos significativos iguales a 0 representa el número cero (“0000” y “1000” para n=4)

# notación signo-magnitud

Cuando se representa un número con una cadena A en notación signo magnitud, al bit más significativo de A se le llama bit de signo ya que si vale cero entonces $A_{(S\text{-}M} \geq 0$ y si vale uno entonces $A_{(S\text{-}M} \leq 0$. A los bits restantes se les denomina magnitud ya que en notación base 2 sin signo representan el valor absoluto de $A_{(S\text{-}M}$



| | Signo | Magnitud | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| + 90 | ⟶ 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| - 90 | ⟶ 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |

# notación complemento a 1

Sea A una cadena de n bits, el complemento a 1 de A, Ca1(A), es otra cadena de n bits tal que $A_{(2}+Ca1(A)_{(2}=2^n-1$

Propiedades de Ca1:

- Ca1(Ca1(A))=A
- Ca1(A) puede obtenerse complementando los bits de A, es decir, $Ca1(A)=\overline{A}$
- Ejemplo: Ca1(“01011010”)=”10100101”

# notación complemento a 1

- El número que representa una cadena de bits A en notación complemento a 1 lo notamos $A_{(Ca1}$
- Con n bits los números representables son los enteros en el intervalo $[-(2^{n-1} – 1), 2^{n-1} – 1]$ (un total de $2^n – 1$)
- Para representar un número $X \geq 0$ se toma una cadena A tal que $A_{(2}=X$. Ejemplo: “01011010”$_{(Ca1}=90$
- Para representar un número $X \leq 0$ se toma una cadena A tal que $Ca1(A)_{(2}=|X|$. Ejemplo: “10100101”$_{(Ca1}=-90$
- Cualquier cadena con todos los bits iguales representa el número cero (“0000” y “1111” para n=4)
- Al bit más significativo de A se le llama bit de signo ya que si vale 0 entonces $A_{(Ca1} \geq 0$ y si vale 1 entonces $A_{(Ca1} \leq 0$.

# notación complemento a 2

Sea A una cadena de n bits, el complemento a 2 de A, Ca2(A), es otra cadena de n bits tal que

$$Ca2(A)_{(2}=(-A_{(2}) \bmod 2^n$$

Propiedades de Ca2:

- $Ca2(Ca2(A))=A$
- Si $A_{(2}=0$ entonces $Ca2(A)=A$
- Si $A_{(2}\neq 0$ entonces $A_{(2}+Ca2(A)_{(2}=2^n$

} $A_{(2}+Ca2(A)_{(2} \bmod 2^n=0$

- $Ca2(A)_{(2}=\overline{A}_{(2}+1 \bmod 2^n$
- Ca2(A) puede obtenerse complementando los bits a la izquierda del primer uno de A empezando por la derecha.
- Ejemplo: Ca2(“01011100”)=”10100100”

# notación complemento a 2

- El número que representa una cadena de bits A en notación complemento a 2 lo notamos $A_{(Ca2}$
- Con n bits los números representables son los enteros en el intervalo $[-2^{n-1}, 2^{n-1} - 1]$ (un total de $2^n$)
- Para representar un número X se toma una cadena A tal que $A_{(2}=X \bmod 2^n$. Ejemplo: "10100110"$_{(Ca2}$=-90
- Propiedad: $A_{(Ca2}=2^0A_0+2^1A_1+2^2A_2+\ldots+2^{n-2}A_{n-2} - 2^{n-1}A_{n-1}$
- Propiedad: Si $A_{(Ca2}\neq-2^{n-1}$ entonces $Ca2(A)_{(Ca2}=-A_{(Ca2}$
- Propiedad: $-A_{(Ca2}=\overline{A}_{(Ca2}+1$
- Sólo la cadena con todos los bits iguales a 0 representa el número cero ("0000" para n=4)
- Al bit más significativo de A se le llama bit de signo ya que si vale 0 entonces $A_{(Ca2}\geq0$ y si vale 1 entonces $A_{(Ca2}<0$.

# notación complemento a 2

- Si S es el bit más significativo de A, $\{S,A\}_{(Ca2} = A_{(Ca2}$, donde {S,A} denota la concatenación de S y A.
- Esto permite encontrar una cadena más larga que A que en notación complemento a 2 represente el mismo número que A usando un procedimiento denominado *extensión de signo*.

# notación complemento a 2

- ¿Como se realiza el proceso inverso de extensión de signo?
  - Se tiene una cadena A de n bits.
  - Se busca una cadena A’ de longitud m<n tal que $A'_{(Ca2}=A_{(Ca2}$
- La cadena A’ que buscamos existe si y sólo si A es la extensión de signo de A’, es decir, si se cumple:
  - Los n-m+1 bits más significativos de A son iguales.
  - A’ son los m bits menos significativos de A.

# notación exceso

- Sea K un número entero, el número que representa una cadena de bits A en notación exceso K lo notamos $A_{(\text{exceso } K}$
- Con n bits los números representables son los enteros en el intervalo [-K, $2^n$-1-K] (un total de $2^n$)
- Para representar un número X se toma una cadena A tal que $A_{(2}$=X+K. Ejemplo: “1100”$_{(\text{exceso } 8}$=4
- Para un valor fijo de n y K, sólo una cadena representa el número cero (“1000” para n=4 y K=8)
- Suele tomarse K=$2^{n-1}$. En tal caso al bit más significativo de A se le llama bit de signo ya que si dicho bit vale 1 entonces $A_{(\text{exceso } K}\geq 0$ y si vale 0 entonces $A_{(\text{exceso } K}<0$.

# notaciones con signo

- Representación de números con signo, ejemplo 4 bits

| | S-M | Ca1 | Ca2 | Exceso $2^3$=8 |
|---|---|---|---|---|
| 7 | 0111 | 0111 | 0111 | 1111 |
| 6 | 0110 | 0110 | 0110 | 1110 |
| 5 | 0101 | 0101 | 0101 | 1101 |
| 4 | 0100 | 0100 | 0100 | 1100 |
| 3 | 0011 | 0011 | 0011 | 1011 |
| 2 | 0010 | 0010 | 0010 | 1010 |
| 1 | 0001 | 0001 | 0001 | 1001 |
| 0 | 0000/1000 | 0000/1111 | 0000 | 1000 |
| -1 | 1001 | 1110 | 1111 | 0111 |
| -2 | 1010 | 1101 | 1110 | 0110 |
| -3 | 1011 | 1100 | 1101 | 0101 |
| -4 | 1100 | 1011 | 1100 | 0100 |
| -5 | 1101 | 1010 | 1011 | 0011 |
| -6 | 1110 | 1001 | 1010 | 0010 |
| -7 | 1111 | 1000 | 1001 | 0001 |
| -8 | - | - | 1000 | 0000 |

# Sumador de magnitud

- Un sumador de magnitud de $n$ bits es un dispositivo digital con dos entradas $a$ y $b$ (sumandos) de $n$ bits, una entrada $Cin$ (entrada de acarreo) de 1 bit, una salida $S$ (suma) de $n$ bits y una salida $Cout$ (salida de acarreo) de 1 bit.
- Funcionalidad: $\{Cout,S\}_{(2}=a_{(2}+b_{(2}+Cin_{(2}$, donde $\{Cout,S\}$ denota la concatenación de $Cout$ y $S$.
- Propiedades:
  - $Cout$=1 si y sólo si $a_{(2}+b_{(2}+Cin_{(2}>2^n-1$
  - Si $Cout$=0 entonces $S_{(2}=a_{(2}+b_{(2}+Cin_{(2}$
  - $S_{(2}=(a_{(2}+b_{(2}+Cin_{(2})$ mod $2^n$

# Restador de magnitud

- Un restador de magnitud de *n* bits es un dispositivo digital con dos entradas *a* y *b* (minuendo y sustraendo) de *n* bits, una entrada *Bin* (entrada de préstamo) de 1 bit, una salida *R* (resta) de *n* bits y una salida *Bout* (salida de préstamo) de 1 bit.
- Funcionalidad: $\{Bout,R\}_{(2}=(a_{(2}-b_{(2}-Bin_{(2})$ mod $2^{n+1}$, es decir, $\{Bout,R\}_{(Ca2}=a_{(2}-b_{(2}-Bin_{(2}$
- Propiedades:
  - $Bout$=1 si y sólo si $a_{(2}-b_{(2}-Bin_{(2}<0$
  - Si $Bout$=0 entonces $R_{(2}=a_{(2}-b_{(2}-Bin_{(2}$
  - $R_{(2}=(a_{(2}-b_{(2}-Bin_{(2})$ mod $2^n$

# Sumadores con signo: Sumador en Ca2

- Sea un sumador de magnitud de $n$ bits con entradas $a$, $b$, $Cin$ y salidas $S$, $Cout$, si $a_{(Ca2}+b_{(Ca2}+Cin_{(2}$ es representable en complemento a 2 con $n$ bits entonces $S_{(Ca2}=a_{(Ca2}+b_{(Ca2}+Cin_{(2}$.

- Demostración: La hipótesis dice que hay una cadena $S'$ de $n$ bits tal que $S'_{(Ca2}=a_{(Ca2}+b_{(Ca2}+Cin_{(2}$. Hay que demostrar que $S'=S$. Por definición tenemos

$$S'_{(2}=S'_{(Ca2} \bmod 2^n=(a_{(Ca2}+b_{(Ca2}+Cin_{(2}) \bmod 2^n=$$

$$=[(a_{(Ca2} \bmod 2^n)+(b_{(Ca2} \bmod 2^n)+Cin_{(2}] \bmod 2^n=(a_{(2}+b_{(2}+Cin_{(2}) \bmod 2^n=S_{(2}$$

$S'_{(2}=S_{(2}$ implica que $S'=S$, pues tienen la misma longitud.

- Conclusión: un sumador en Ca2 es funcionalmente idéntico a un sumador de magnitud.

# Sumadores con signo: Sumador en Ca2

Tabla de verdad de sumador magnitud/CA2 de 4 bits

| | | $B_{(CA2}$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | -8 | -7 | -6 | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $B_{(2}$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| $A_{(CA2}$ | $A_{(2}$ | A\B | 0000 | 0001 | 0010 | 0011 | 0100 | 0101 | 0110 | 0111 | 1000 | 1001 | 1010 | 1011 | 1100 | 1101 | 1110 | 1111 |
| 0 | 0 | 0000 | 0000 | 0001 | 0010 | 0011 | 0100 | 0101 | 0110 | 0111 | 1000 | 1001 | 1010 | 1011 | 1100 | 1101 | 1110 | 1111 |
| 1 | 1 | 0001 | 0001 | 0010 | 0011 | 0100 | 0101 | 0110 | 0111 | 1000 | 1001 | 1010 | 1011 | 1100 | 1101 | 1110 | 1111 | 0000 |
| 2 | 2 | 0010 | 0010 | 0011 | 0100 | 0101 | 0110 | 0111 | 1000 | 1001 | 1010 | 1011 | 1100 | 1101 | 1110 | 1111 | 0000 | 0001 |
| 3 | 3 | 0011 | 0011 | 0100 | 0101 | 0110 | 0111 | 1000 | 1001 | 1010 | 1011 | 1100 | 1101 | 1110 | 1111 | 0000 | 0001 | 0010 |
| 4 | 4 | 0100 | 0100 | 0101 | 0110 | 0111 | 1000 | 1001 | 1010 | 1011 | 1100 | 1101 | 1110 | 1111 | 0000 | 0001 | 0010 | 0011 |
| 5 | 5 | 0101 | 0101 | 0110 | 0111 | 1000 | 1001 | 1010 | 1011 | 1100 | 1101 | 1110 | 1111 | 0000 | 0001 | 0010 | 0011 | 0100 |
| 6 | 6 | 0110 | 0110 | 0111 | 1000 | 1001 | 1010 | 1011 | 1100 | 1101 | 1110 | 1111 | 0000 | 0001 | 0010 | 0011 | 0100 | 0101 |
| 7 | 7 | 0111 | 0111 | 1000 | 1001 | 1010 | 1011 | 1100 | 1101 | 1110 | 1111 | 0000 | 0001 | 0010 | 0011 | 0100 | 0101 | 0110 |
| -8 | 8 | 1000 | 1000 | 1001 | 1010 | 1011 | 1100 | 1101 | 1110 | 1111 | 0000 | 0001 | 0010 | 0011 | 0100 | 0101 | 0110 | 0111 |
| -7 | 9 | 1001 | 1001 | 1010 | 1011 | 1100 | 1101 | 1110 | 1111 | 0000 | 0001 | 0010 | 0011 | 0100 | 0101 | 0110 | 0111 | 1000 |
| -6 | 10 | 1010 | 1010 | 1011 | 1100 | 1101 | 1110 | 1111 | 0000 | 0001 | 0010 | 0011 | 0100 | 0101 | 0110 | 0111 | 1000 | 1001 |
| -5 | 11 | 1011 | 1011 | 1100 | 1101 | 1110 | 1111 | 0000 | 0001 | 0010 | 0011 | 0100 | 0101 | 0110 | 0111 | 1000 | 1001 | 1010 |
| -4 | 12 | 1100 | 1100 | 1101 | 1110 | 1111 | 0000 | 0001 | 0010 | 0011 | 0100 | 0101 | 0110 | 0111 | 1000 | 1001 | 1010 | 1011 |
| -3 | 13 | 1101 | 1101 | 1110 | 1111 | 0000 | 0001 | 0010 | 0011 | 0100 | 0101 | 0110 | 0111 | 1000 | 1001 | 1010 | 1011 | 1100 |
| -2 | 14 | 1110 | 1110 | 1111 | 0000 | 0001 | 0010 | 0011 | 0100 | 0101 | 0110 | 0111 | 1000 | 1001 | 1010 | 1011 | 1100 | 1101 |
| -1 | 15 | 1111 | 1111 | 0000 | 0001 | 0010 | 0011 | 0100 | 0101 | 0110 | 0111 | 1000 | 1001 | 1010 | 1011 | 1100 | 1101 | 1110 |

S=A+B

# Restador en Ca2

- Sea un restador de magnitud de $n$ bits con entradas $a$ (minuendo), $b$ (sustranedo), $Bin$ y salidas $R$, $Bout$, si $a_{(Ca2}$-$b_{(Ca2}$-$Bin_{(2}$ es representable en complemento a 2 con $n$ bits entonces $R_{(Ca2}=a_{(Ca2}$-$b_{(Ca2}$-$Bin_{(2}$.

- Demostración: La hipótesis dice que hay una cadena $R'$ de $n$ bits tal que $R'_{(Ca2}=a_{(Ca2}$-$b_{(Ca2}$-$Bin_{(2}$. Hay que demostrar que $R'=R$. Por definición tenemos

$$R'_{(2}=R'_{(Ca2} \bmod 2^n=(a_{(Ca2}\text{-}b_{(Ca2}\text{-}Bin_{(2}) \bmod 2^n=$$

$$=[(a_{(Ca2} \bmod 2^n)\text{-}(b_{(Ca2} \bmod 2^n)\text{-}Bin_{(2}] \bmod 2^n=(a_{(2}\text{-}b_{(2}\text{-}Bin_{(2}) \bmod 2^n=R_{(2}$$

$R'_{(2}=R_{(2}$ implica que $R'=R$, pues tienen la misma longitud.

- Conclusión: un restador en Ca2 es funcionalmente idéntico a un restador de magnitud.

# Aritmética binaria

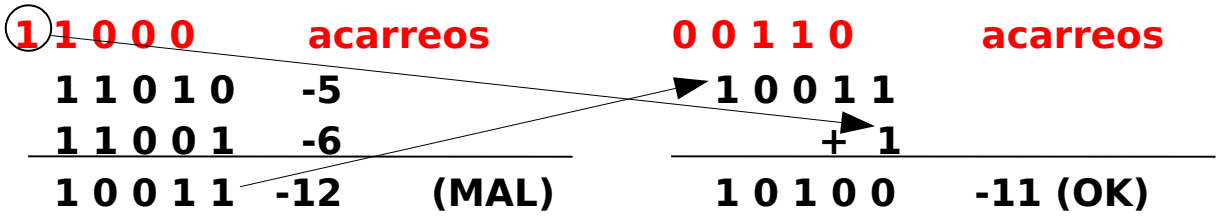
- La notación entera sin signo más utilizada para realizar cálculos aritméticos es la base 2.
  - Los sumadores/restadores de magnitud pueden implementarse de forma sencilla y eficiente.
- La notación entera con signo más utilizada para realizar cálculos aritméticos es Ca2.
  - Los sumadores/restadores de magnitud también son sumadores/restadores Ca2. Por eso los procesadores actuales usan las mismas instrucciones de suma/resta entera para ambas notaciones.
  - Sumar/restar en otras notaciones con signo es más complicado.

# Ejemplo: Sumar en S-M

- Para obtener la suma de dos números en S-M:
  - Si ambos tienen el mismo signo
    - La magnitud del resultado coincide con la suma de las magnitudes.
    - El bit de signo del resultado es el mismo que el de cualquiera de los sumandos.
  - Si los números tienen distinto signo
    - La magnitud del resultado se obtiene restando la magnitud menor de la mayor.
    - El signo del resultado se corresponde con el signo que tenga la magnitud mayor.
- El circuito que realizase ese cálculo requeriría sumadores de magnitud, restadores de magnitud, comparadores, multiplexores, etc.

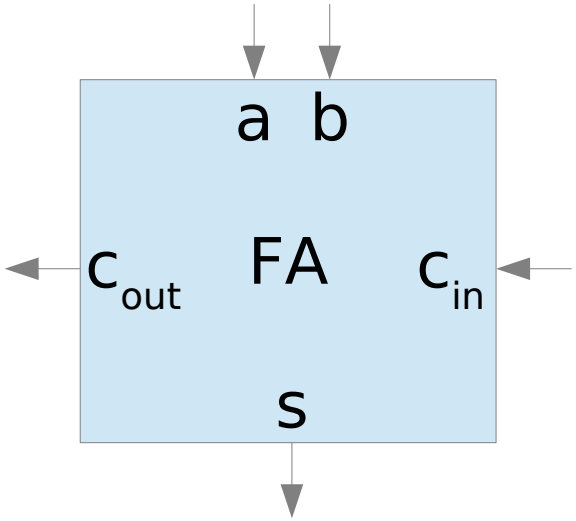
# Ejemplo: Sumar en Ca1

- Puede hacerse en dos pasos:
  - Paso 1: Se alimenta un sumador de magnitud con los sumandos Ca1 y se anota el valor de las salidas.
  - Paso 2: Sumar el valor obtenido de $C_{OUT}$ al resultado



# Circuitos sumadores básicos

- Sumador completo Full Adder (F.A.): Tiene la funcionalidad de un sumador de magnitud de un bit.



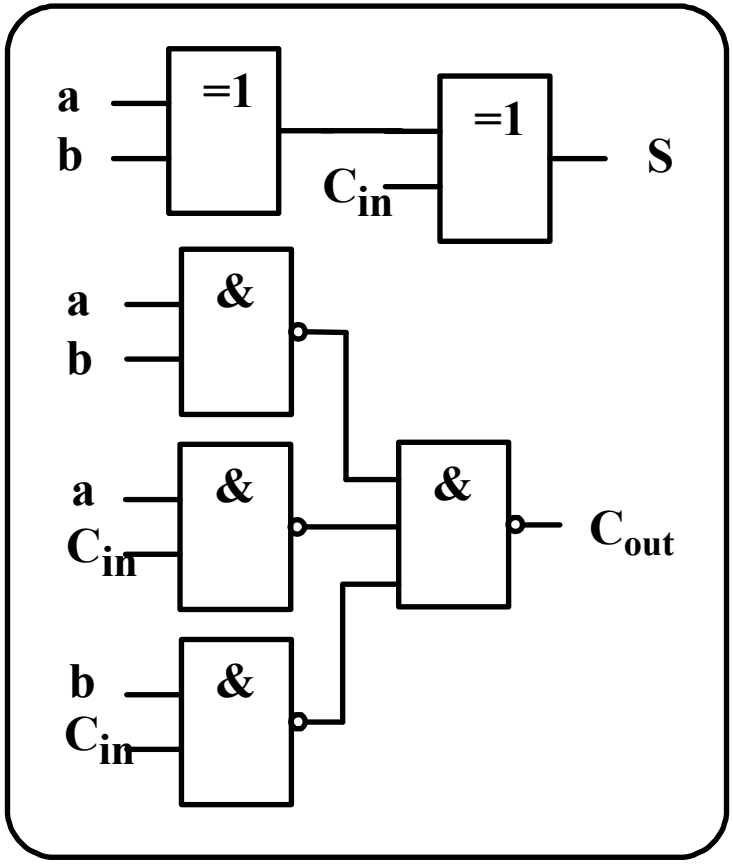

| a | b | $c_{in}$ | $c_{out}$ | s |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

$$s = a \oplus b \oplus c_{in}$$
$$c_{out} = a\,b + a\,c_{in} + b\,c_{in}$$

# Circuitos sumadores básicos

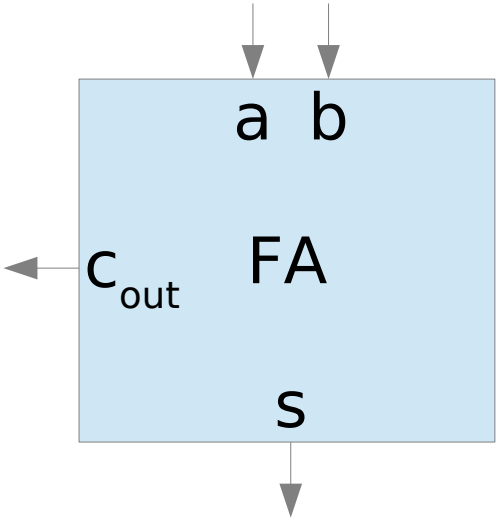
- Sumador completo Full Adder (FA)
  - Una implementación mediante puertas lógicas

$$s = a \oplus b \oplus c_{in}$$
$$c_{out} = a\,b + a\,c_{in} + b\,c_{in}$$



# Circuitos sumadores básicos

- Semisumador o Half Adder (H.A.): Carece de entrada de carry.




| a | b | $c_{out}$ | s |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

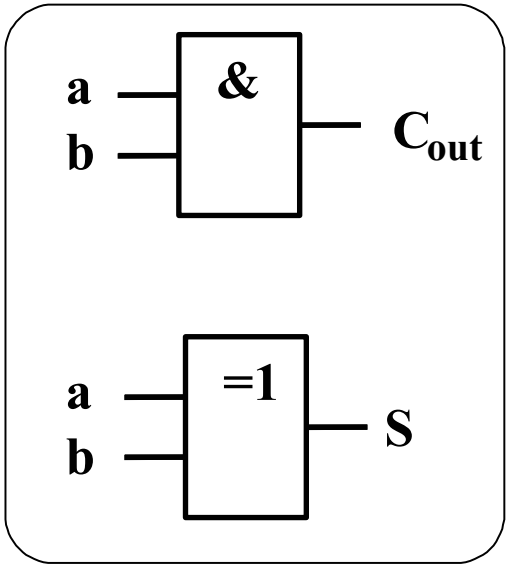
$s = a \oplus b$

$c_{out} = a\ b$

# Circuitos sumadores básicos

- Semisumador o Half Adder (HA)
  - Una posible implementación mediante puertas lógicas

$s = a \oplus b$
$c_{out} = a\ b$



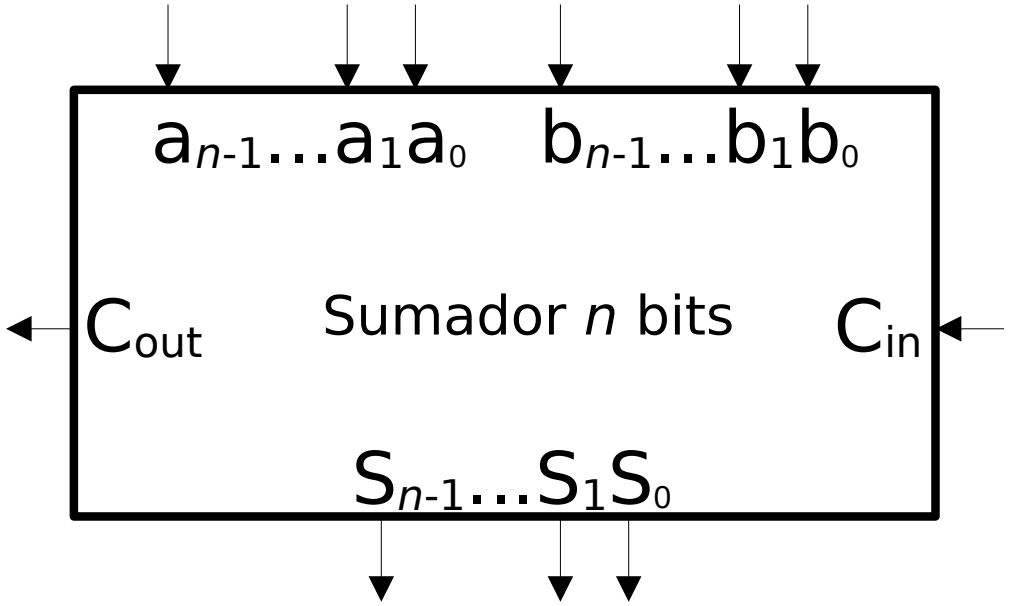
# Circuitos sumadores básicos

- Descripción LDH de un sumador completo (FA)

```
//////////////////////// Sumador FA ////////////////////////////////////

module fa(
        input x, // primer operando
        input y, // segundo operando
        input cin, // acarreo de entrada
        output z, // salida de suma
        output cout  // acarreo de salida
        );

        assign z = x ^ y ^ cin;
        assign cout = x & y | x & cin | y & cin;

endmodule   // fa
```

# Implementación de un sumador de *n* bits

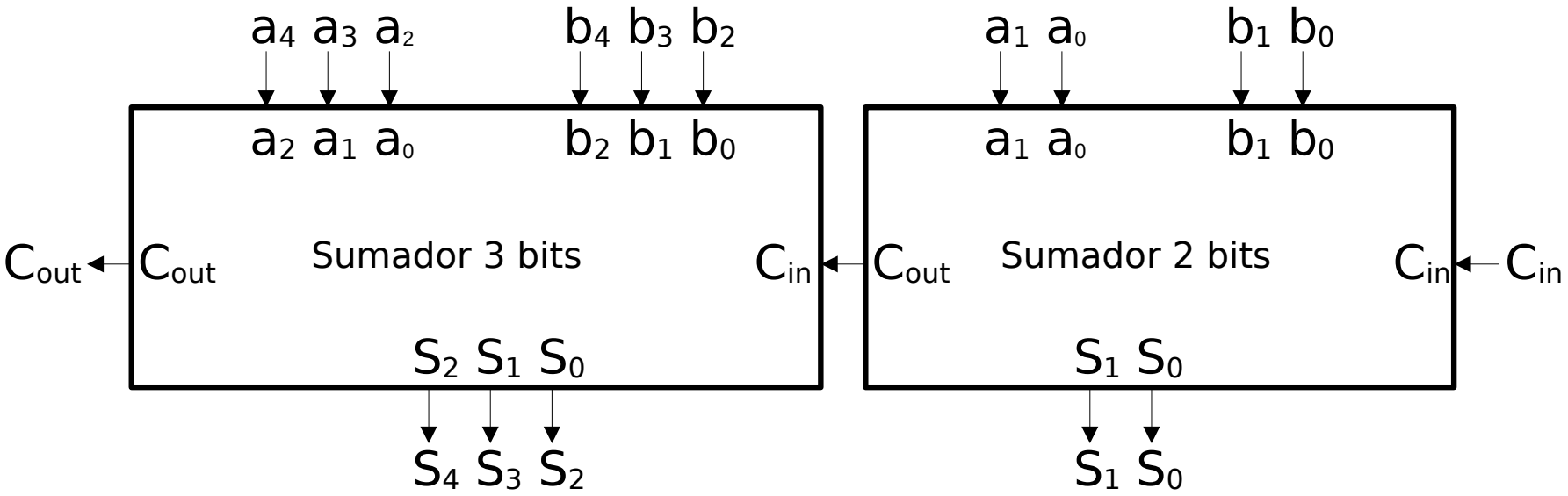
- Un sumador de magnitud/Ca2 de *n* bits con entrada de acarreo tiene esta estructura.




$$\begin{array}{lcl} C_{out} & c_{n-1} \ldots c_2 \; c_1 \; c_0 = C_{in} \\ & a_{n-1} \ldots a_2 \; a_1 \; a_0 \\ + & b_{n-1} \ldots b_2 \; b_1 \; b_0 \\ \hline & S_{n-1} \ldots S_2 \; S_1 \; S_0 \end{array}$$

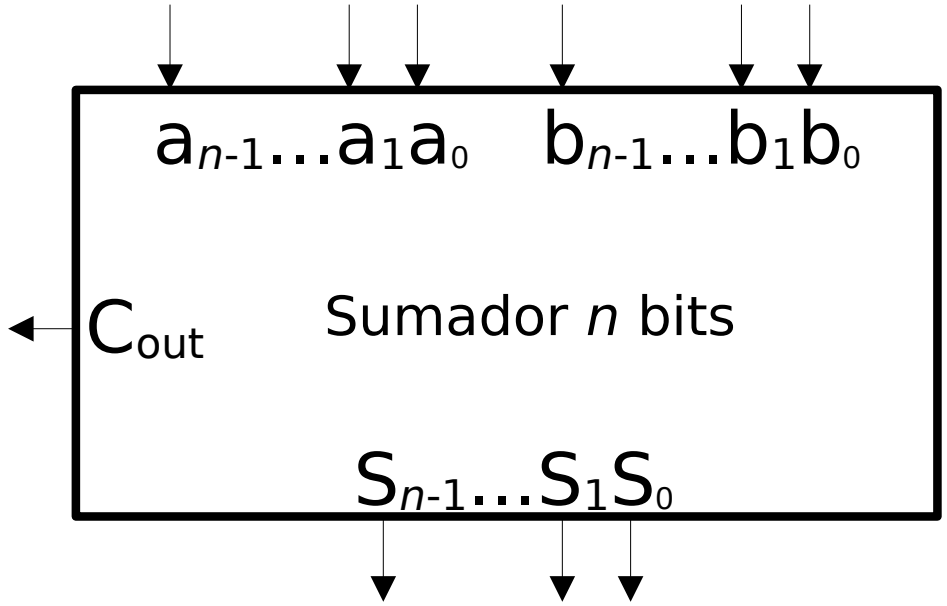
# Implementación de un sumador de *n* bits

- Un sumador/restador puede construirse a partir de sumadores/restadores más pequeños encadenando sus entradas de carry/borrow. Por ejemplo, un sumador de 5 bits puede construirse encadenando un sumador de 2 bits son otro de tres bits.



# Implementación de un sumador de *n* bits

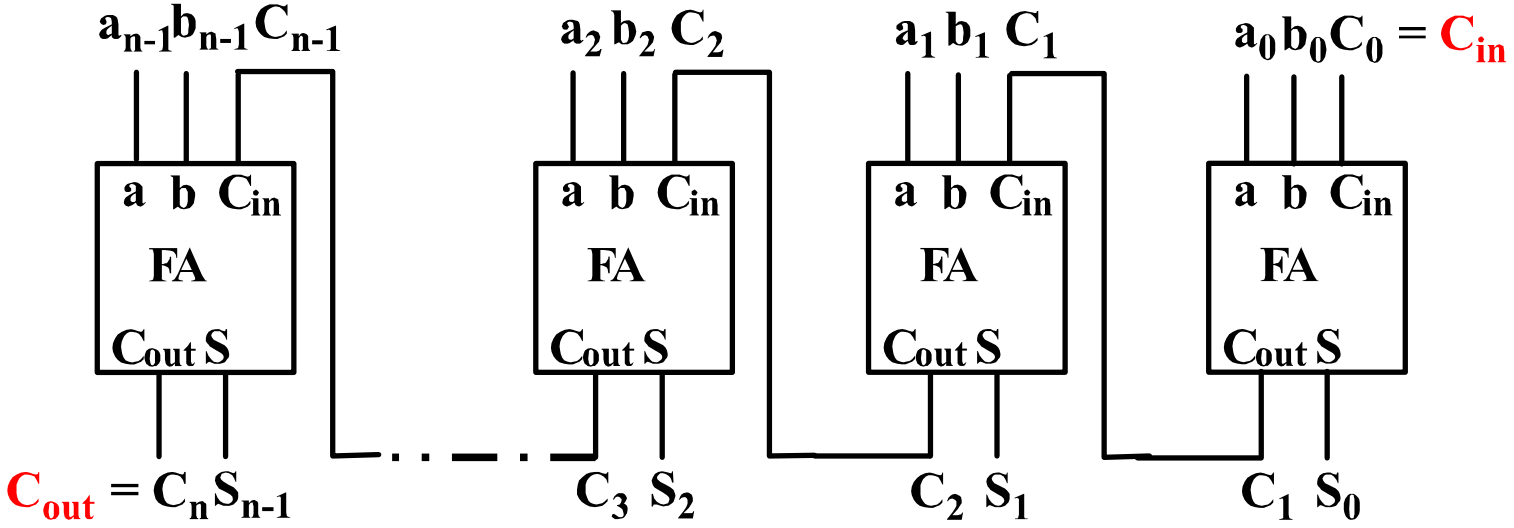
- Un sumador de magnitud/Ca2 de *n* bits sin entrada de acarreo funciona como un sumador que tuviese la entrada de acarreo fija a 0. Tiene esta estructura.




$$
\begin{array}{lll}
C_{out} & c_{n-1} \ldots & c_2\ c_1 \\
 & a_{n-1} \ldots & a_2\ a_1\ a_0 \\
+ & b_{n-1} \ldots & b_2\ b_1\ b_0 \\
\hline
 & S_{n-1} \ldots & S_2\ S_1\ S_0
\end{array}
$$

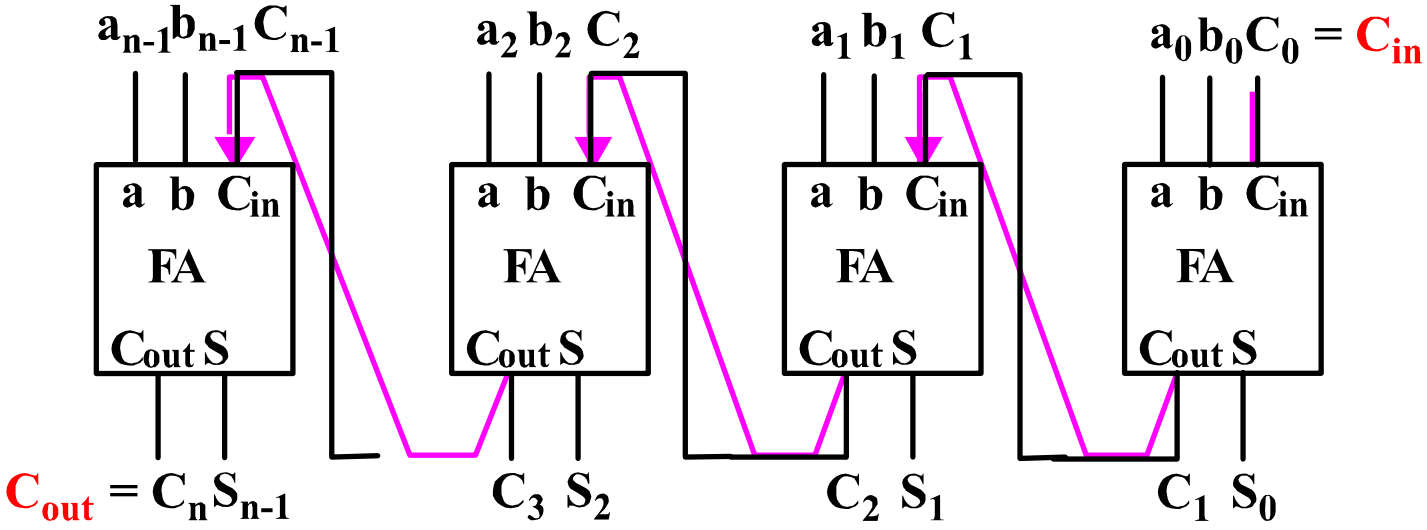
# Implementación de un sumador de *n* bits

- La implementación conocida como sumador con acarreo serie (también llamada sumador de rizado o ripple adder) es la más intuitiva y tiene un coste razonablemente bajo.
- Se trata de un circuito modular construido con sumadores completos de un bit. Si no hay entrada de acarreo se usa un semisumador para generar el bit menos significativo.



# Implementación de un sumador de *n* bits

- Es lento debido a la propagación serie del acarreo
- El tiempo que tarda en realizarse una suma crece linealmente con el número de bits

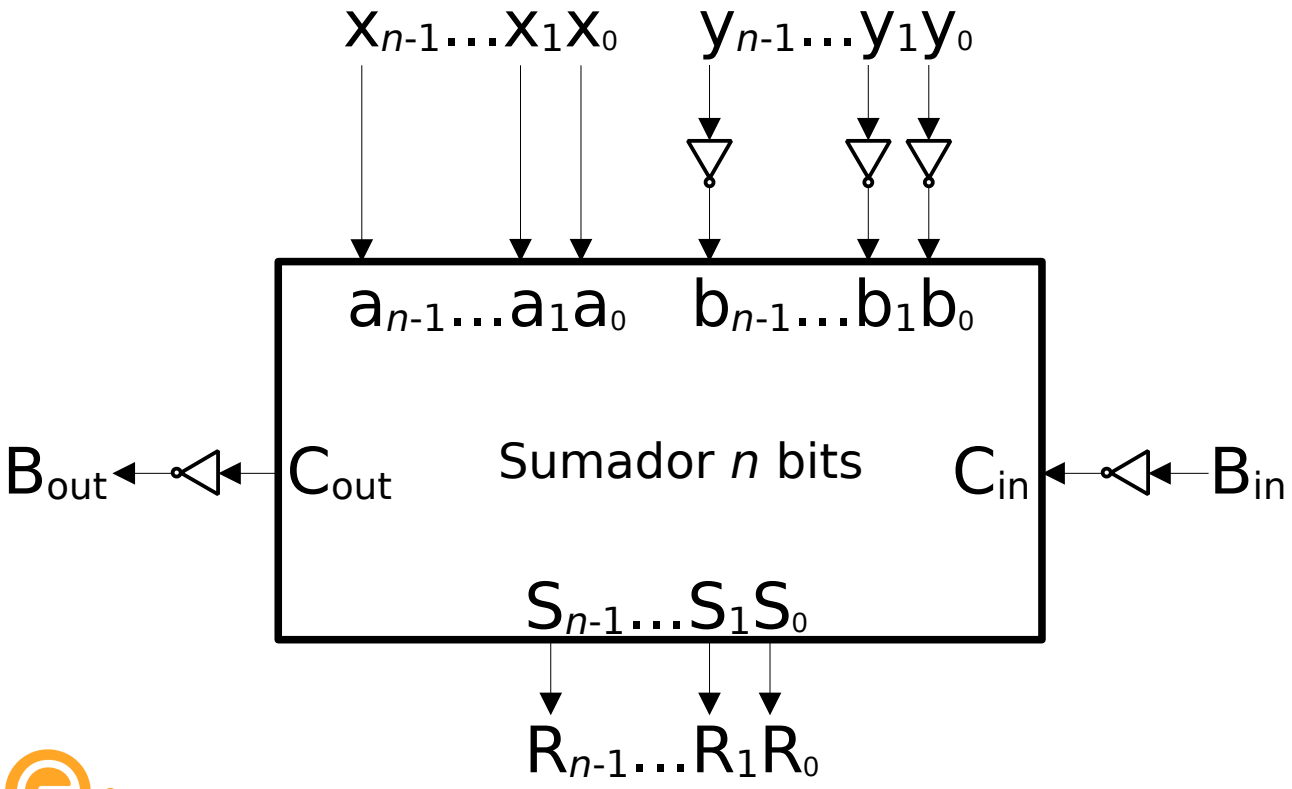


# Descripción LDH de un sumador de 8 bits

```
////////////////////////// // Sumador 8 bits con FA // ////////////////////////////////////
module adder8_e(
        input [7:0] a, // primer operando
        input [7:0] b, // segundo operando
        input cin, // acarreo de entrada
        output [7:0] s, // salida de suma
        output cout  // acarreo de salida
        );
/* Este sumador se construye mediante la conexión en cascada de 8
* sumadores completos (FA). Cada FA genera un bit del resultado.

* 'c' es una señal auxiliar para la conexión del acarreo de salida de
una
* etapa con el acarreo de salida de la etapa siguiente */
wire [7:1] c;

/* El acarreo de entrada del primer FA es el acarreo de entrada del
* módulo sumador */
        fa fa0 (a[0], b[0], cin, s[0], c[1]);
        fa fa1 (a[1], b[1], c[1], s[1], c[2]);
        fa fa2 (a[2], b[2], c[2], s[2], c[3]);
        fa fa3 (a[3], b[3], c[3], s[3], c[4]);
        fa fa4 (a[4], b[4], c[4], s[4], c[5]);
        fa fa5 (a[5], b[5], c[5], s[5], c[6]);
        fa fa6 (a[6], b[6], c[6], s[6], c[7]);
/* El acarreo de salida del último FA es el acarreo de salida del
 * módulo sumador */
        fa fa7 (a[7], b[7], c[7], s[7], cout);
endmodule   // adder8_e
```

# Implementación de un restador de *n* bits

- Un restador de magnitud/Ca2 de *n* bits con señales de entrada *x*, *y*, *Bin* (minuendo, sustraendo, entrada de prestamo) y señales de salida *R*, *Bout* (resta, salida de prestamo) puede implementarse así:



# Implementación de un restador de *n* bits

- Antes de demostrar que funciona, véase el pequeño lema $L \bmod 2^{n+1}=0$, siendo $L=(1+\overline{Cout}_{(2}-Cout_{(2})\ 2^n$
- Sabemos que
  - $\{Cout,S\}_{(2}=a_{(2}+b_{(2}+Cin_{(2}=x_{(2}+\overline{y}_{(2}+\overline{Bin}_{(2}$
  - $Bout=\overline{Cout}$
  - $R=S$
- Hay que demostrar
  - $\{Bout,R\}_{(2}=(x_{(2}-y_{(2}-Bin_{(2}) \bmod 2^{n+1}$

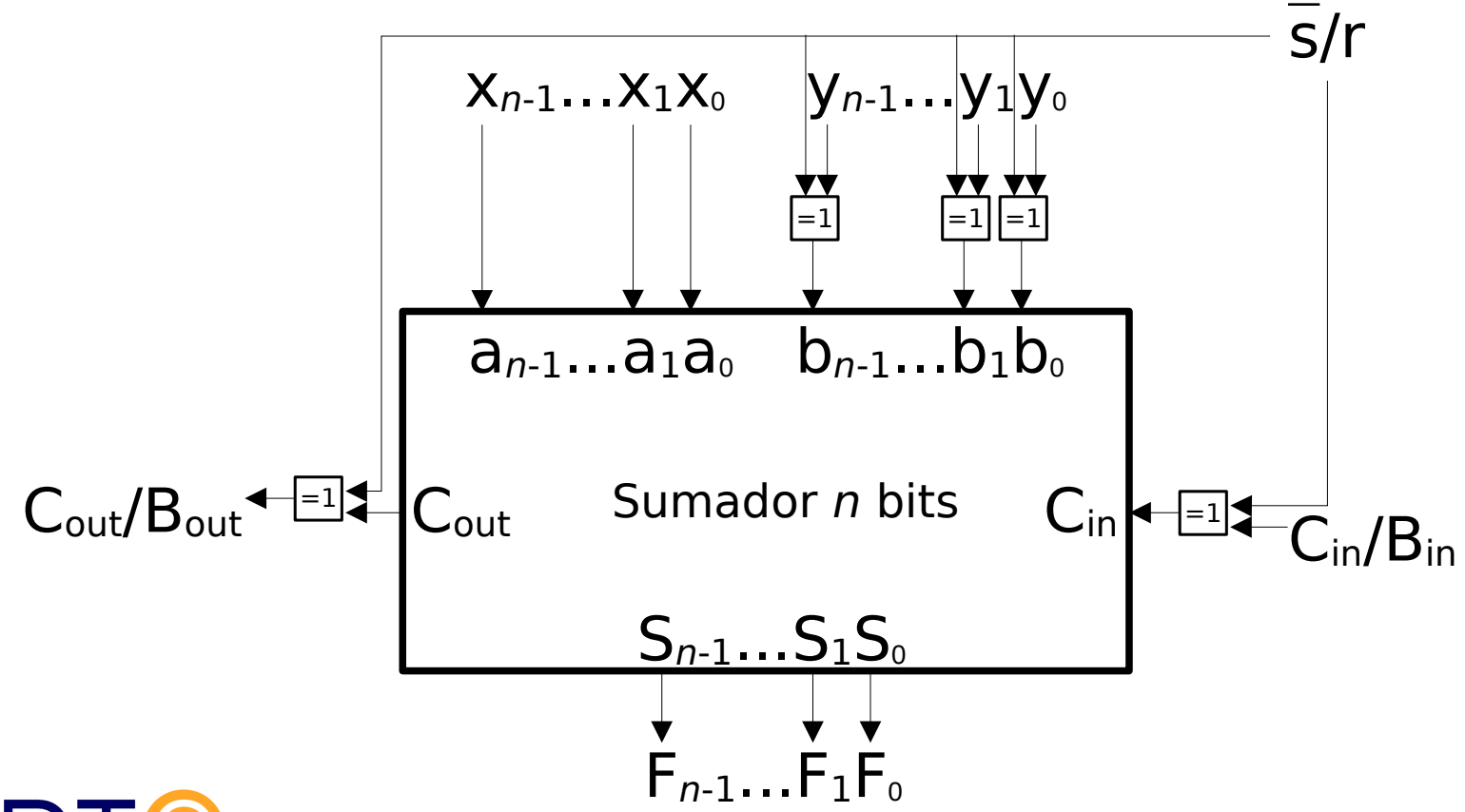
# Implementación de un restador de *n* bits

- Demostración:

$\{Bout,R\}_{(2}=\{Bout,R\}_{(2}\bmod 2^{n+1}=\{\overline{Cout},S\}_{(2}\bmod 2^{n+1}=$
$(\overline{Cout}_{(2}2^n+S_{(2})\bmod 2^{n+1}=$
$(2^n+\overline{Cout}_{(2}2^n-Cout_{(2}2^n+Cout_{(2}2^n+S_{(2}-2^n)\bmod 2^{n+1}=$
$[(1+\overline{Cout}_{(2}-Cout_{(2})2^n+\{Cout,S\}_{(2}-2^n]\bmod 2^{n+1}=$
$(L+\{Cout,S\}_{(2}-2^n)\bmod 2^{n+1}=$
$[(L \bmod 2^{n+1}+(\{Cout,S\}_{(2}-2^n)\bmod 2^{n+1}]\bmod 2^{n+1}=$
$[(\{Cout,S\}_{(2}-2^n)\bmod 2^{n+1}]\bmod 2^{n+1}=$
$(\{Cout,S\}_{(2}-2^n)\bmod 2^{n+1}=(x_{(2}+\overline{y}_{(2}+\overline{Bin}_{(2}-2^n)\bmod 2^{n+1}=$
$(x_{(2}+2^n-1-y_{(2}+2^1-1-Bin_{(2}-2^n)\bmod 2^{n+1}=$
$(x_{(2}-y_{(2}-Bin_{(2})\bmod 2^{n+1}$

# Implementación de un sumador-restador

- Conclusión: Este circuito funciona como un sumador de magnitud/Ca2 o como un restador de magnitud/Ca2 dependiendo del valor de la señal de control $\bar{s}/r$.



# Desbordamiento en operaciones enteras

- A veces, a un circuito diseñado para realizar cálculos en alguna notación entera se le pide computar una operación cuyo resultado no es representable.
- Cuando eso ocurre se dice que se produce un desbordamiento.
- Ejemplo: Supongamos que un sumador/restador de 4 bits como el mostrado anteriormente se pone $x$=1111, $y$=0001, $\overline{s}/r$=0 y *Cin/Bin*=0. ¿Se produciría desbordamiento?

# Desbordamiento en operaciones enteras

- A veces, a un circuito diseñado para realizar cálculos en alguna notación entera se le pide computar una operación cuyo resultado no es representable.
- Cuando eso ocurre se dice que se produce un desbordamiento.
- Ejemplo: Supongamos que un sumador/restador de 4 bits como el mostrado anteriormente se pone $x$=1111, $y$=0001, $\overline{s}/r$=0 y *Cin/Bin*=0. ¿Se produciría desbordamiento?
- La pregunta está incompleta porque ese dispositivo sirve para hacer operaciones en dos notaciones, y no se menciona cual de ellas se está usando:
  - Si es sin signo (base 2), sí hay desbordamiento
  - Si es con signo (Ca2), no hay desbordamiento

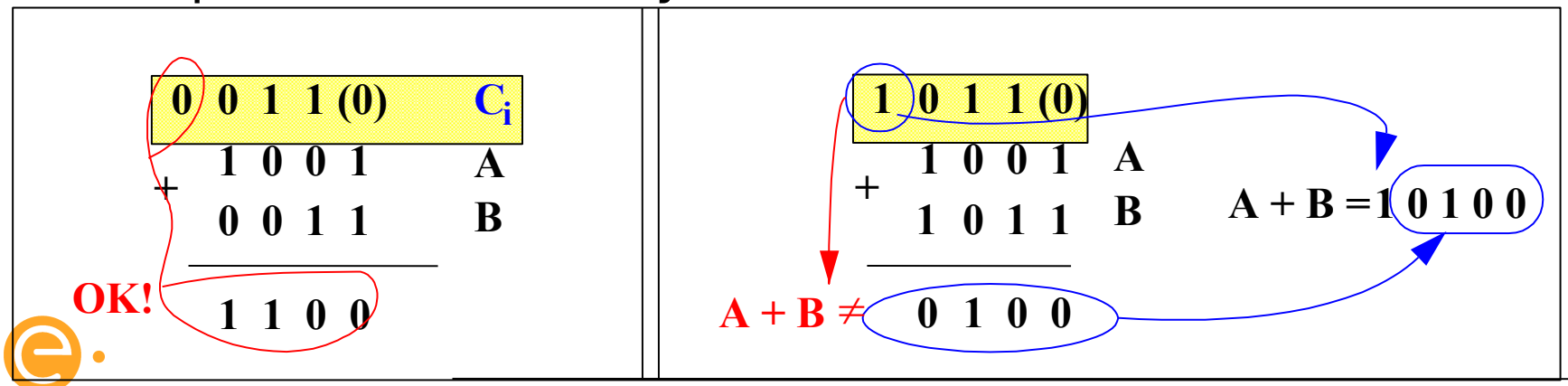
# Salidas de estado

- En un circuito aritmético, las salidas empleadas para representar los valores que se pretenden calcular se denominan *salidas de datos*.

- El resto de salidas proporciona algún tipo de información sobre esos valores y se denominan *salidas de estado* o, si son de un sólo bit, *salidas de condición* o *flags*. Las típicas de un sumador/restador entero se denominan *C*, *V*, *S*, *N* y *Z*.

# Salida de estado *C*

- Vale 1 si y sólo si hay desbordamiento usando notación sin signo.
- En nuestro sumador/restador de *n* bits es la salida *Cout/Bout* ya que:
  - En una suma es imposible que el resultado sea menor que 0, por tanto habrá desbordamiento si y sólo si es mayor que $2^n$-1, es decir, si y sólo si *Cout*=1.
  - En una resta es imposible que el resultado sea mayor que $2^n$-1, por tanto habrá desbordamiento si y sólo si es menor que 0, es decir, si y sólo si *Bout*=1.



# Salida de estado *V*

- Del inglés *oVerflow*
- Vale 1 si y sólo si hay desbordamiento usando notación con signo.
- Por ejemplo, supongamos que añadimos está salida a un sumador/restador de 4 bits como el del ejemplo y lo usamos para realizar las siguientes sumas:

$$\begin{array}{r} 1001 = -7 \\ +\ 0101 = +5 \\ \hline 1110 = -2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1100 = -4 \\ +\ 0100 = +4 \\ \hline 10000 = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0101 = +5 \\ +\ 0100 = +4 \\ \hline 01001 = -7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1100 = -4 \\ +\ 1111 = -1 \\ \hline 11011 = -5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0011 = +3 \\ +\ 0100 = +4 \\ \hline 0111 = +7 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1001 = -7 \\ +\ 1010 = -6 \\ \hline 10011 = +3 \end{array}$$

*V*=0 (no hay desbordamiento) *V*=1 (hay desbordamiento)

# Salida de estado *S*

- Del inglés *Sign*. No debe confundirse con la salida de datos homónima del sumador
- Vale 1 si y sólo el resultado es menor que cero usando notación complemento a 2.
- Proporciona información válida incluso cuando hay desbordamiento.
- Si añadimos esta señal a nuestro sumador/restador, al usar notación complemento a 2 el resultado correcto será siempre $\{S,F\}_{(Ca2}$

$$\begin{array}{r} 1001 = -7 \\ +\ 0101 = +5 \\ \hline 1110 = -2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1100 = -4 \\ +\ 0100 = +4 \\ \hline 10000 = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0101 = +5 \\ +\ 0100 = +4 \\ \hline 01001 = -7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1100 = -4 \\ +\ 1111 = -1 \\ \hline 11011 = -5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0011 = +3 \\ +\ 0100 = +4 \\ \hline 0111 = +7 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1001 = -7 \\ +\ 1010 = -6 \\ \hline 10011 = +3 \end{array}$$

*V*=0 (no hay desbordamiento) *V*=1 (hay desbordamiento)

# Salida de estado *N*

- Del inglés *Negative*
- Es igual al bit más significativo de la salida de datos.
- *N* y *S* pueden ser distintos, porque puede haber desbordamiento.

$$\begin{array}{r} 1001 = -7 \\ +\ 0101 = +5 \\ \hline 1110 = -2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1100 = -4 \\ +\ 0100 = +4 \\ \hline 10000 = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0101 = +5 \\ +\ 0100 = +4 \\ \hline 01001 = -7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1100 = -4 \\ +\ 1111 = -1 \\ \hline 11011 = -5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0011 = +3 \\ +\ 0100 = +4 \\ \hline 0111 = +7 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1001 = -7 \\ +\ 1010 = -6 \\ \hline 10011 = +3 \end{array}$$

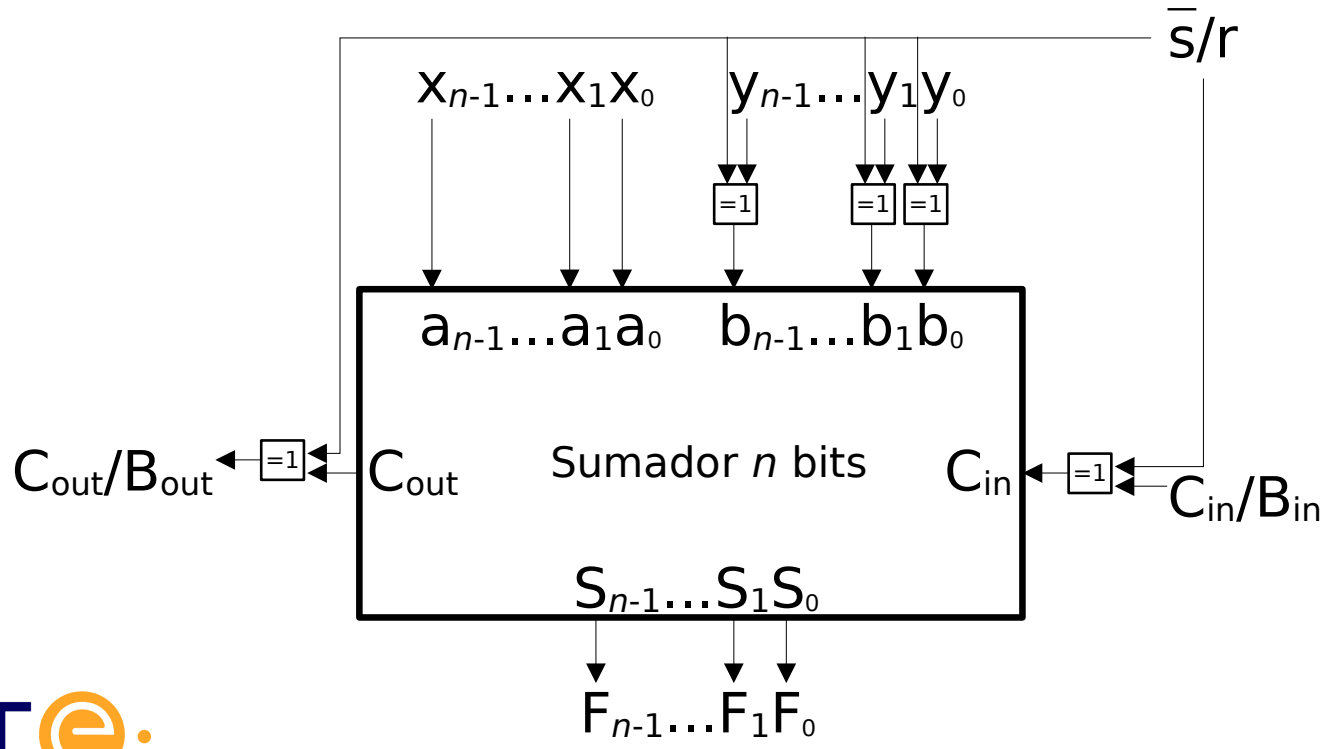
*V*=0 (no hay desbordamiento) *V*=1 (hay desbordamiento)

# Salida de estado *Z*

- Del inglés *Zero*
- Vale 1 si y sólo si todos los bits de la salida de datos valen 0.
- Si añadimos esta salida a un sumador/restador de *n* bits como el del ejemplo, independientemente de si se usa notación con signo nos dará la siguiente información:
  - Si $Z$=1 el valor del resultado mod $2^n$ es igual a cero.
  - Si $Z$=0 el valor del resultado mod $2^n$ es distinto de cero.

# Salidas de estado

- ¿Como añadimos las salidas *C*, *V*, *S*, *N* y *Z* en el sumador/restador de *n* bits como el del ejemplo?
- *C* es Cout/Bout.
- *N* es $F_{n-1}$.
- *Z* es el NOR de los bits de F.

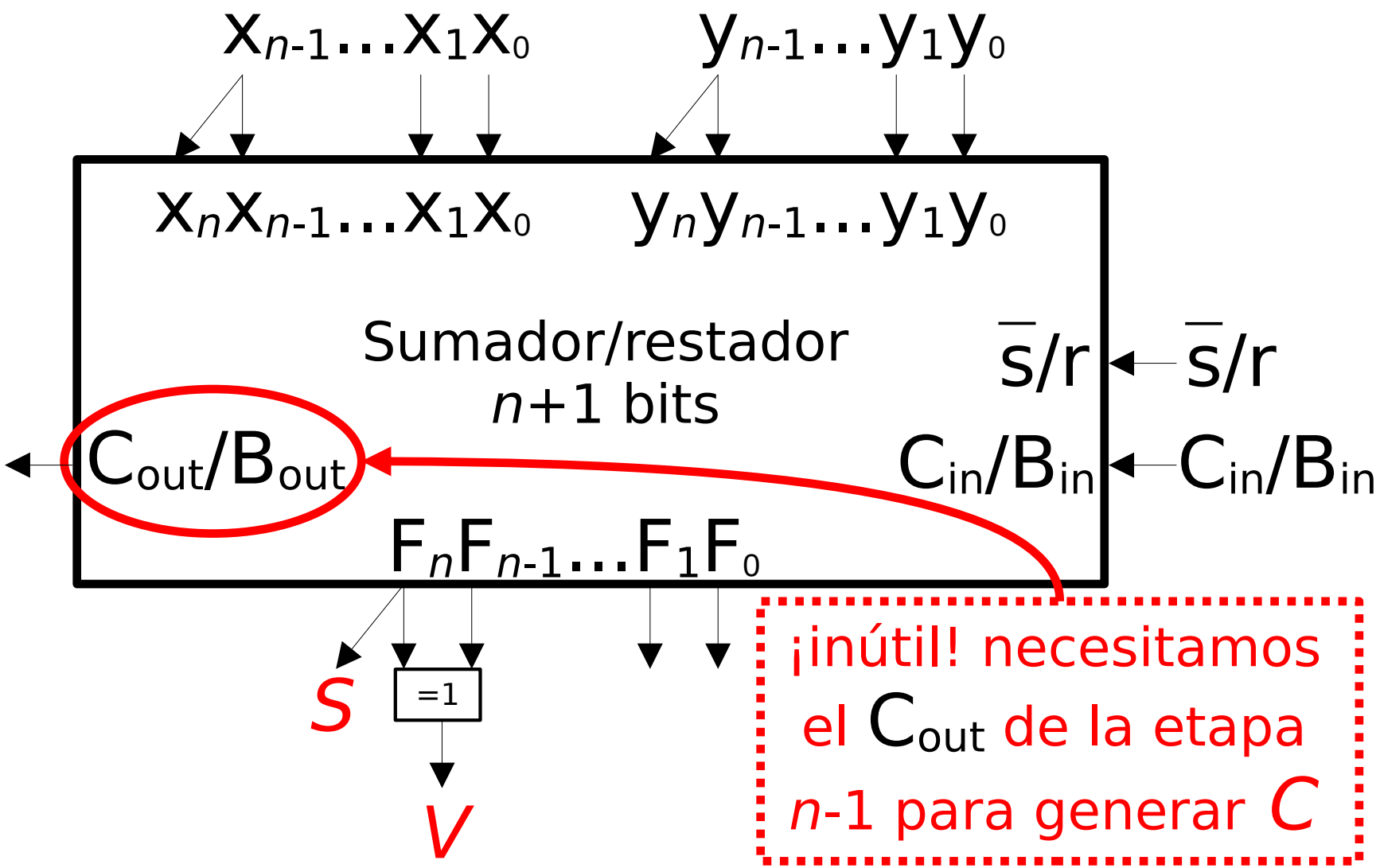


# Salidas de estado

- Para implementar *V* y *S* consideremos lo siguiente:
  - Con n bits, los números representables en Ca2 son los enteros en el intervalo $[-2^{n-1},2^{n-1} - 1]$
  - El resultado más bajo sería $(-2^{n-1})+(-2^{n-1})=-2^{n}$
  - El resultado más alto sería $(2^{n-1} - 1)-(-2^{n-1})=2^{n} - 1$
  - Con n+1 bits, los números representables en Ca2 son los enteros en el intervalo $[-2^{n},2^{n} - 1]$
  - Por tanto, el resultado del sumador/restador de n bits puede siempre representarse en Ca2 con n+1 bits.
  - La representación correcta del resultado en Ca2 con n+1 bits podemos obtenerla alimentando un sumador/restador de n+1 bits con la extensión de signo de los operandos.

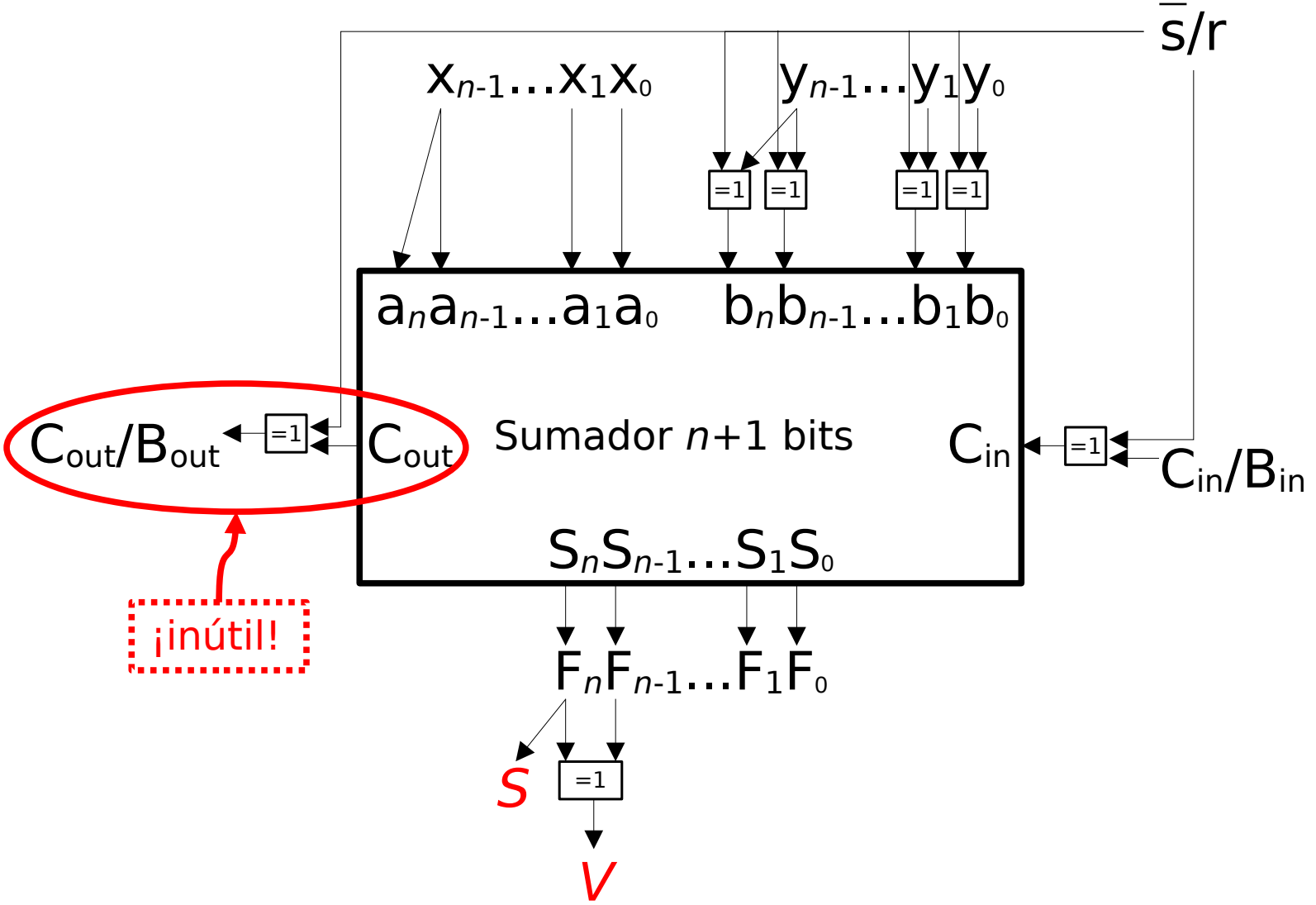
# Salidas de estado

Por tanto *V* y *S* podrían generarse con este circuito:



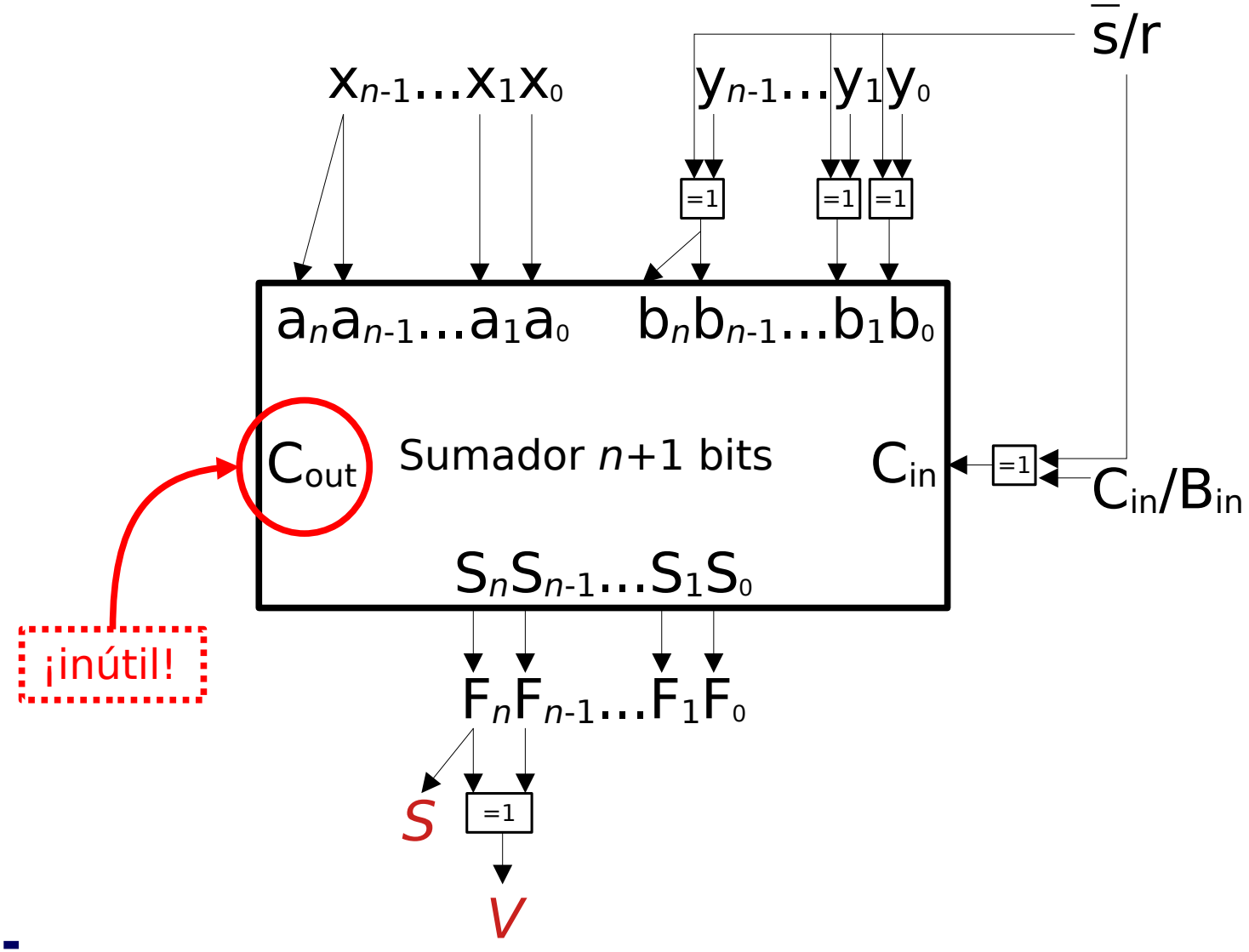
# Salidas de estado

El sumador/restador de n+1 bits podría hacerse así:



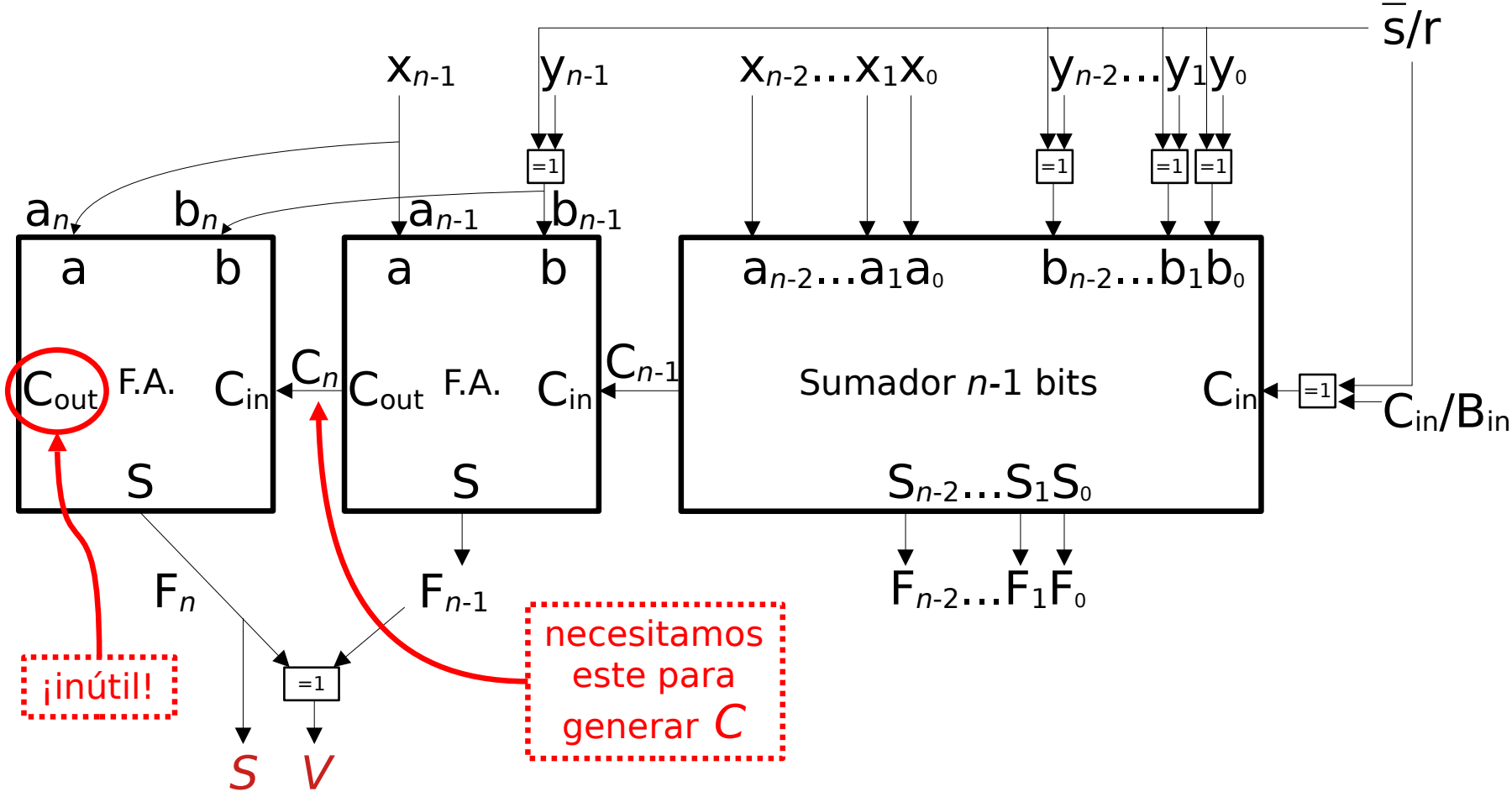
# Salidas de estado

Optimizando:



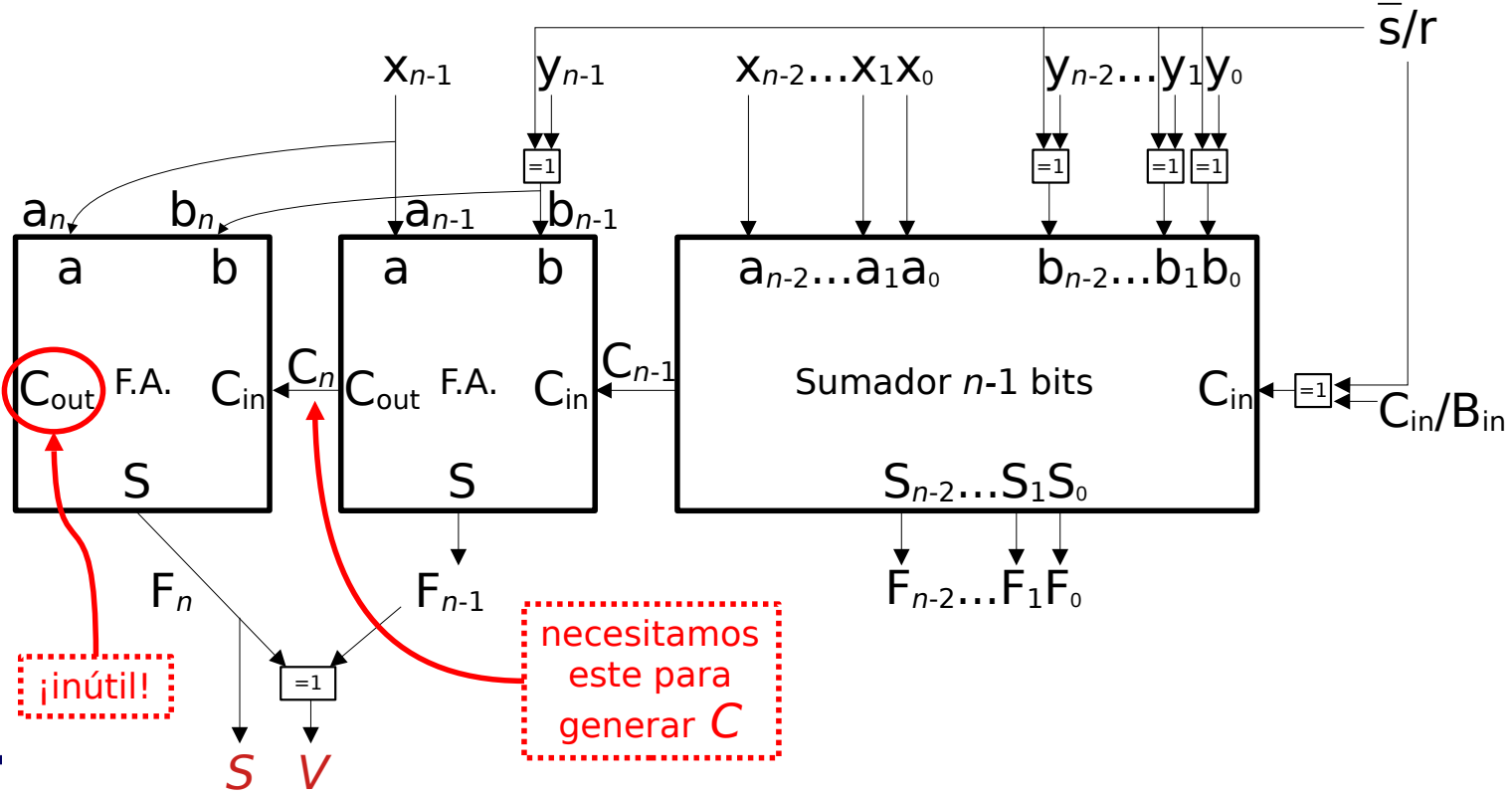
# Salidas de estado

Continuemos la optimización. El sumador de n+1 bits podría hacerse con un sumador de n-1 bits en serie con dos sumadores completos de un bit:



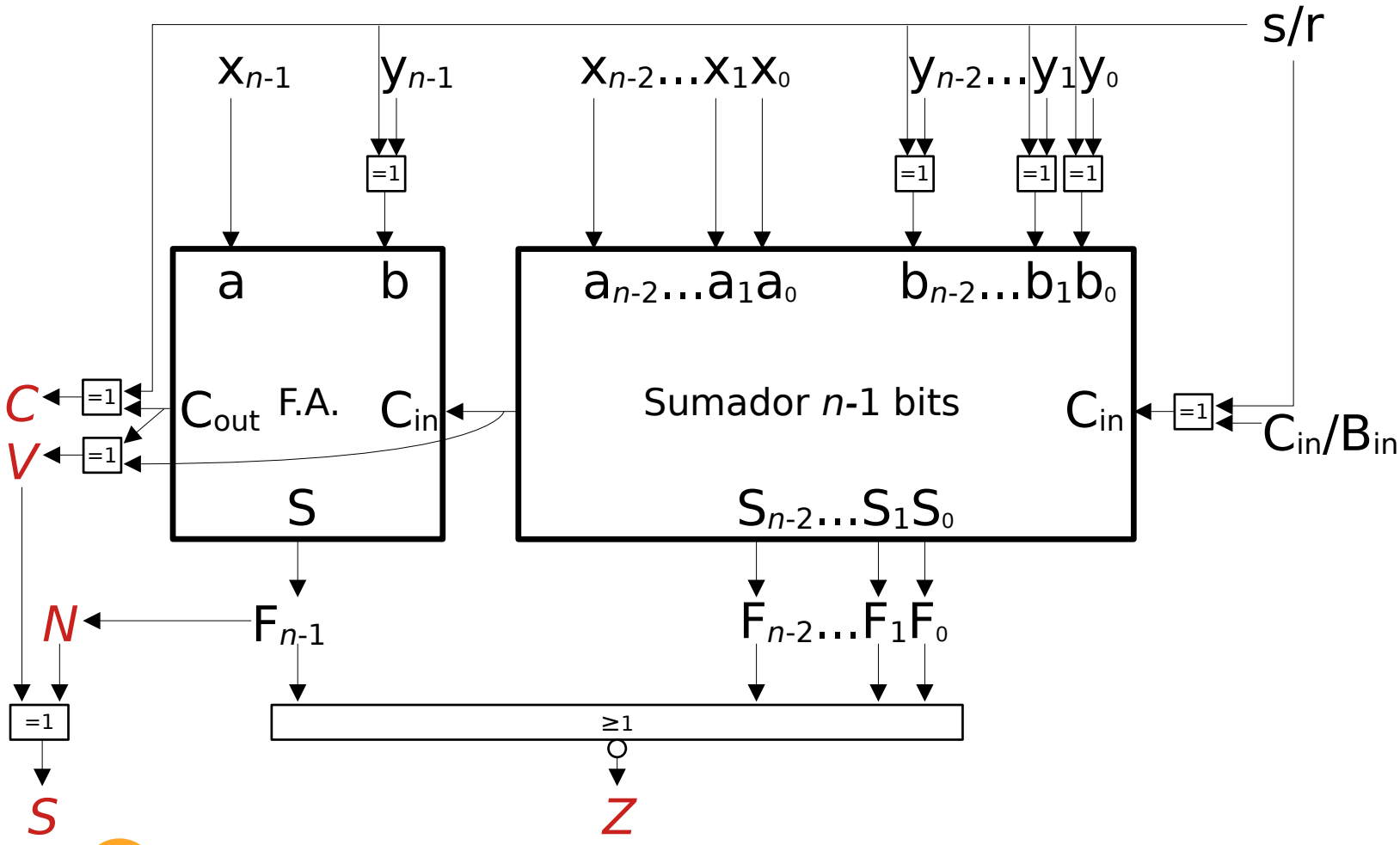
# Salidas de estado

- $F_{n-1}=a_{n-1}\oplus b_{n-1}\oplus C_{n-1}$
- $F_n=a_n\oplus b_n\oplus C_n=a_{n-1}\oplus b_{n-1}\oplus C_n$
- $V=F_n\oplus F_{n-1}=C_n\oplus C_{n-1}$
- $S=F_n=F_n\oplus 0=F_n\oplus F_{n-1}\oplus F_{n-1}=V\oplus F_{n-1}$



# Salidas de estado

Por tanto podemos prescindir de uno de los sumadores completos. La implementación del sumador/restador de n bits con las salidas de estado mencionadas podría ser así:



# Descripción LDH de un sumador/restador de n bits

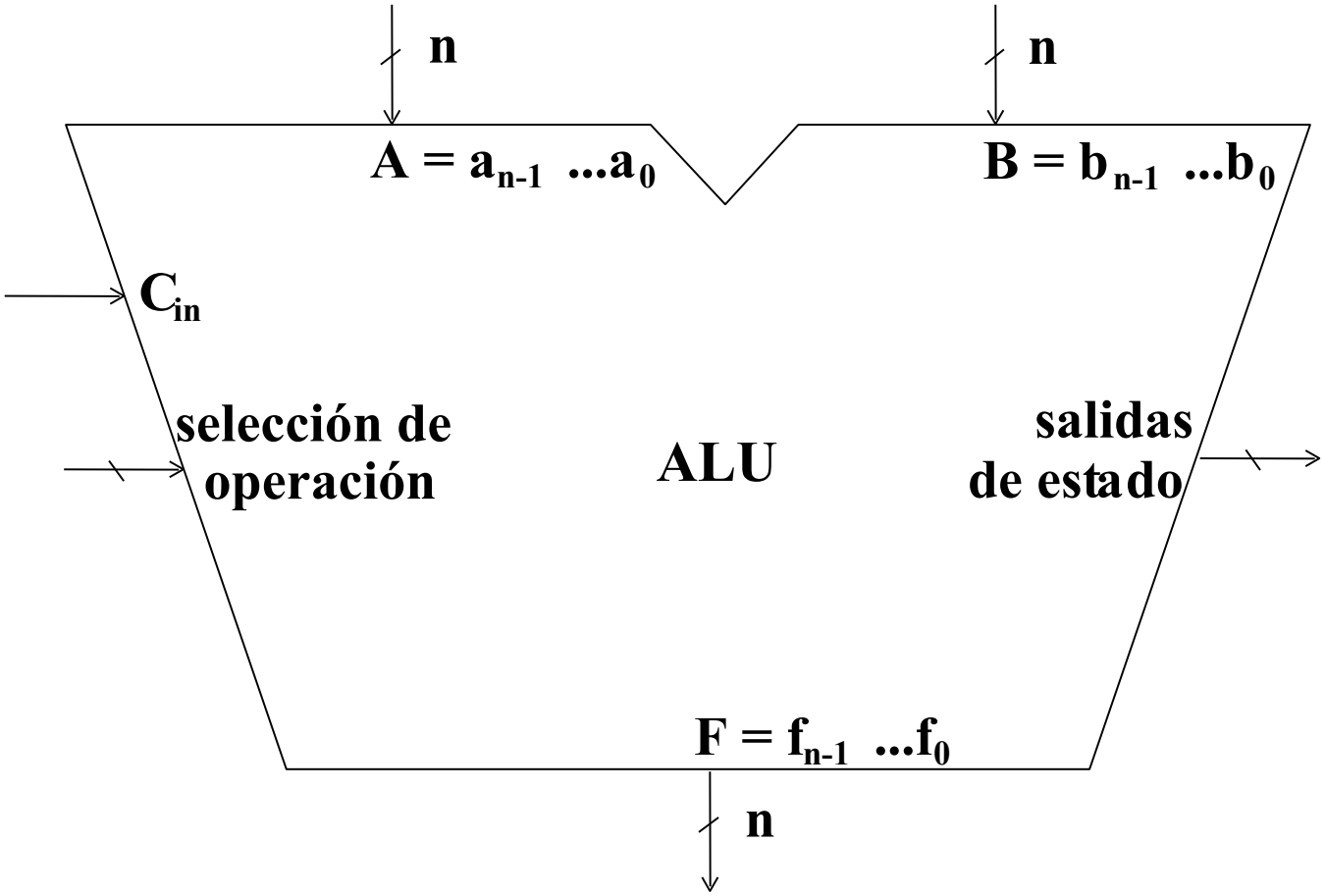
```
////////////////////// // Sumador/Restador // ////////////////////////////////////
module sumsub1 (
        input signed [WIDTH-1:0] a, // primer operando
        input signed [WIDTH-1:0] b, // segundo operando
        input op, // operación (0-suma, 1-resta)
        output signed [WIDTH-1:0] f, // salida
        output ov // desbordamiento
        );
        parameter WIDTH = 8;
        reg f, ov;
/* f y ov se declaran como variables (tipo 'reg') porque van a usarse en un procedimiento 'always' */
        always @*
        begin :sub
/* Definimos una variable local al bloque para realizar la suma con un bit adicional
* La definición de varialbles locales es posible sólo si se nombra el bloque ('sub') en * este caso */
                reg signed [WIDTH:0] s;
/* Aquí, la construcción 'if' hubiera sido igual de efectiva que el 'case' pero, en general, cuando la decisión
* depende de una sola variable (en este caso 'op') 'case' resulta más claro, especialmente cuando el
* número de posibles valores de la variable es elevado */
                case (op)
                        0:
                                s = a + b;
                        default:
                                s = a - b;
                endcase
// Salida de desbordamiento
/* 's' contiene el valor correcto de la operación. La extensión del signo se realiza automáticamente ya que
* los tipos son ‘signed’. El desbordamiento se obtiene:  */
                if (s[WIDTH] != s[WIDTH-1])
                        ov = 1;
                else
                        ov = 0;
// Salida
                f = s[WIDTH-1:0];
        end
endmodule // sumsub1
```

# Unidad aritmético-lógica (ALU)

- Es un circuito que realiza operaciones aritméticas y lógicas. Normalmente usa dos operandos de entrada.
- Tiene señales de control de entrada que permiten seleccionar la operación a realizar.

# Unidad aritmético-lógica (ALU)

- Representación esquemática de una ALU



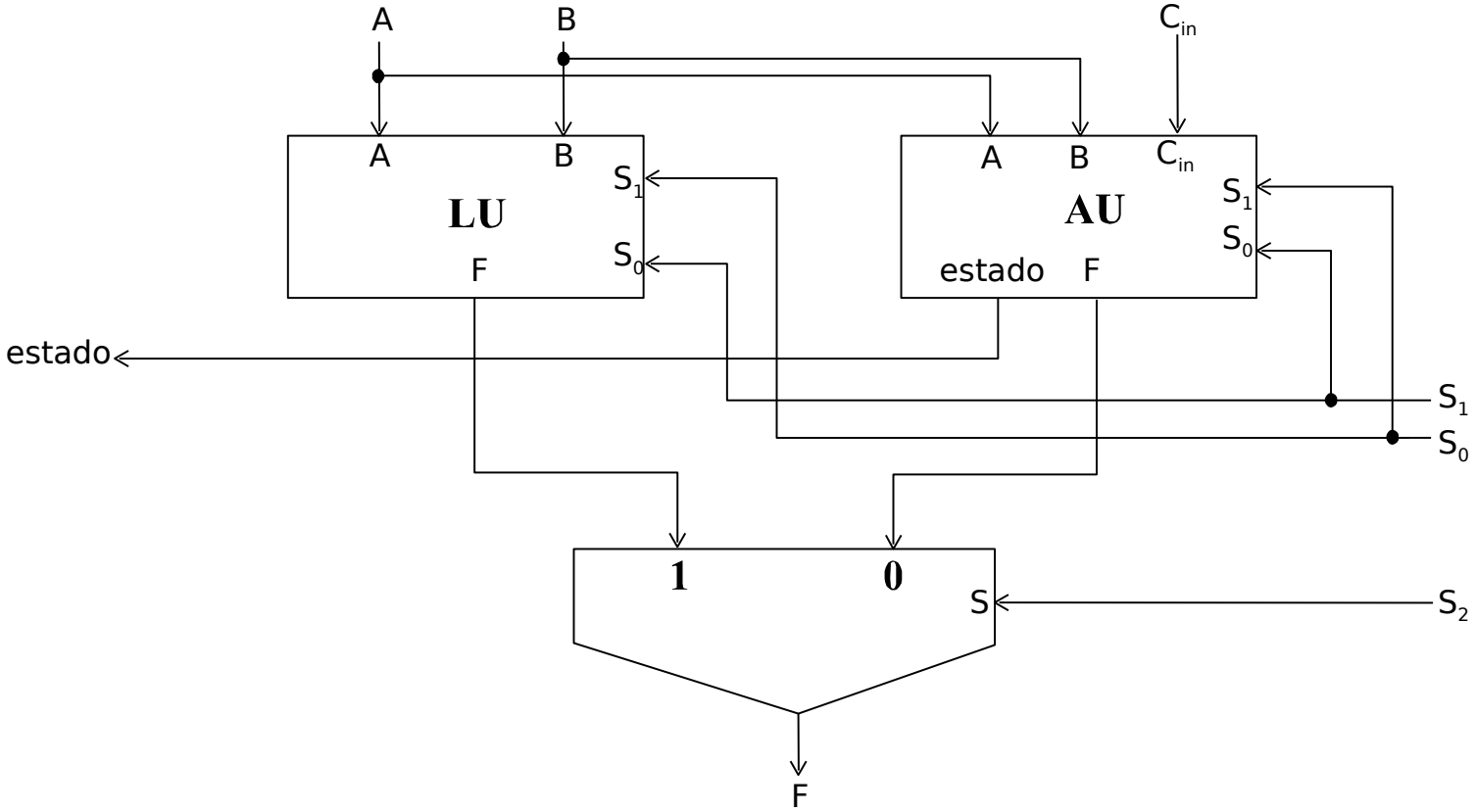
# Unidad aritmético-lógica (ALU)

- Ejemplo de funciones de una posible ALU con tres señales de selección de operación:

| $S_2$ $S_1$ $S_0$ | Función |
|---|---|
| 0 0 0 | $F_{(2} = A_{(2} + B_{(2} \bmod 2^n$ |
| 0 0 1 | $F_{(2} = A_{(2} - B_{(2} \bmod 2^n$ |
| 0 1 0 | $F_{(2} = A_{(2} + B_{(2} + Cin_{(2} \bmod 2^n$ |
| 0 1 1 | $F_{(2} = A_{(2} - B_{(2} - Cin_{(2} \bmod 2^n$ |
| 1 0 0 | F = A AND B |
| 1 0 1 | F = A OR B |
| 1 1 0 | F = NOT A |
| 1 1 1 | F = A XOR B |

# Unidad aritmético-lógica (ALU)

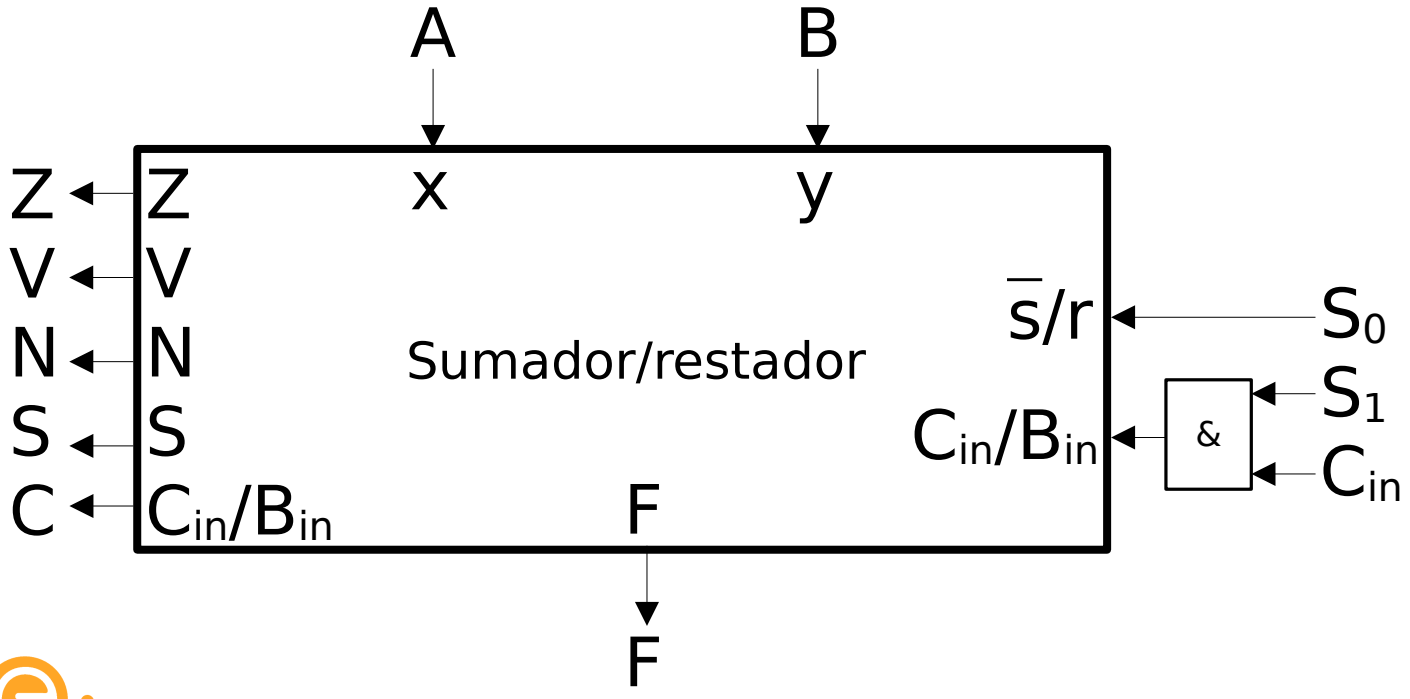
- Ejemplo de implementación de la ALU del ejemplo:
  Se divide el diseño en una unidad aritmética (AU) y una unidad lógica (LU).



# Unidad aritmético-lógica (ALU)

- Ejemplo de implementación de la unidad aritmética:

| $S_2$ $S_1$ $S_0$ | Función ALU |
|---|---|
| 0 0 0 | $F_{(2} = A_{(2} + B_{(2} \bmod 2^n$ |
| 0 0 1 | $F_{(2} = A_{(2} - B_{(2} \bmod 2^n$ |
| 0 1 0 | $F_{(2} = A_{(2} + B_{(2} + Cin_{(2} \bmod 2^n$ |
| 0 1 1 | $F_{(2} = A_{(2} - B_{(2} - Cin_{(2} \bmod 2^n$ |



# Unidad aritmético-lógica (ALU)

- Ejemplo de implementación de la unidad lógica:

| $S_2$ $S_1$ $S_0$ | Función ALU |
|---|---|
| 1 0 0 | F = A AND B |
| 1 0 1 | F = A OR B |
| 1 1 0 | F = NOT A |
| 1 1 1 | F = A XOR B |